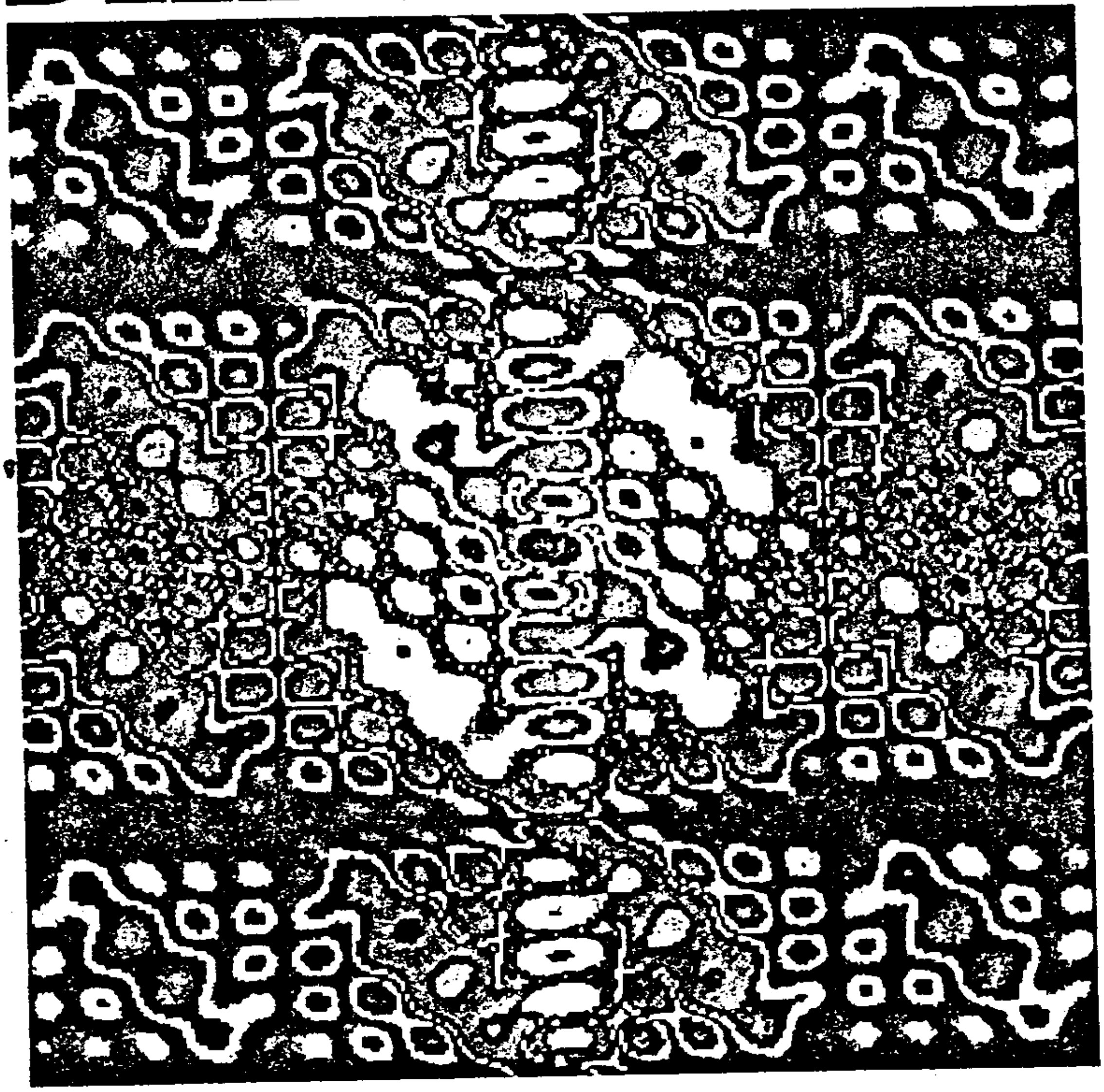
# VITO CAPPELLINI
# ELABORAZIONE NUMERICA DELLE IMMAGINI



BORINGHIERI

*Vito Cappellini, nato nel 1938, è professore di Comunicazioni elettriche presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università di Firenze e direttore dell'Istituto di Ricerca sulle onde elettromagnetiche (IROE) del CNR di Firenze. Ha compiuto numerose ricerche, da solo e in collaborazione, con contributi originali nell'ambito dell'elaborazione numerica dei segnali e delle immagini e in quello delle comunicazioni numeriche. Ha sviluppato molte applicazioni ai settori delle comunicazioni, del radar, del telerilevamento, della biomedicina, della robotica e dei beni culturali.*

**PROGRAMMA DI MATEMATICA, FISICA, ELETTRONICA**

*Collezione diretta da*
*Emilio Gatti, Francesco Gherardelli, Luigi Radicati, Edoardo Vesentini*

Mario Ageno, *Elementi di fisica*
T.M. Apostol, *Calcolo*
  Vol. 1 *Analisi 1*
  Vol. 2 *Geometria*
  Vol. 3 *Analisi 2*
Scipione Bobbio e Emilio Gatti, *Elementi di elettromagnetismo*
Max Born, *Fisica atomica*
Vito Cappellini, *Elaborazione numerica delle immagini*
Francesco Carassa, *Comunicazioni elettriche*
P.A.M. Dirac, *I princìpi della meccanica quantistica*
Albert Einstein, *Il significato della relatività*
Enrico Fermi, *Termodinamica*
Bruno Ferretti, *Le radici classiche della meccanica quantica*
Giorgio Franceschetti, *Campi elettromagnetici*
Giovanni Gallavotti, *Meccanica elementare*
Enrico Giusti, *Analisi matematica 1*
Enrico Giusti, *Analisi matematica 2*
Werner Heisenberg, *I princìpi fisici della teoria dei quanti*
Gerhard Herzberg, *Spettri atomici e struttura atomica*
Charles Kittel, *Introduzione alla fisica dello stato solido*
Serge Lang, *Algebra lineare*
Giorgio Letta, *Teoria elementare dell'integrazione*
P.F. Manfredi, Piero Maranesi e Tiziana Tacchi,
  *L'amplificatore operazionale*
Jacob Millman e C.C. Halkias, *Dispositivi e circuiti elettronici*
Jacob Millman e C.C. Halkias, *Microelettronica*
Jacob Millman, *Circuiti e sistemi microelettronici*
R.S. Muller e T.I. Kamins, *Dispositivi elettronici nei circuiti integrati*
Athanasios Papoulis, *Probabilità, variabili aleatorie e processi stocastici*
Wolfgang Pauli, *Teoria della relatività*
Giovanni Prodi, *Analisi matematica*
Antonio Ruberti e Alberto Isidori, *Teoria dei sistemi*
Walter Rudin, *Analisi reale e complessa*
H.H. Schaefer, *Introduzione alla teoria spettrale*
I.M. Singer e J.A. Thorpe, *Lezioni di topologia elementare e di geometria*
W.V. Smith e P.P. Sorokin, *Il laser*
Bruno Touschek e Giancarlo Rossi, *Meccanica statistica*

VITO CAPPELLINI

# ELABORAZIONE NUMERICA DELLE IMMAGINI

Inv. 60471
BIBLIOTECA

BORINGHIERI

Prima edizione 1985

© 1985 Editore Boringhieri *società per azioni*
Torino, corso Vittorio Emanuele 86
Stampato in Italia dalla STIGE di Torino nel Marzo 1985
CL 74-9210-3 ISBN 88-339-5006-9

# Indice

*Prefazione, 9*

Introduzione: Elaborazione numerica dei segnali, *11*

I.1 Premessa
I.2 Analisi ed elaborazione continua dei segnali
I.3 Conversione dei segnali in forma numerica e ricostruzione continua
I.4 Caratterizzazione matematica e analisi dei segnali convertiti in forma numerica e dei sistemi numerici
I.5 Trasformazioni numeriche e algoritmi di elaborazione numerica
I.6 Cenni ai diversi settori applicativi
Riferimenti bibliografici

1 Analisi ed elaborazione continua delle immagini, *32*

1.1 Premessa
1.2 Trasformata di Fourier bidimensionale e multidimensionale
1.3 Proprietà della trasformata di Fourier bidimensionale
1.4 Sistemi lineari bidimensionali
1.5 Analisi statistica delle immagini
1.6 Modelli strutturali di rappresentazione delle immagini con rumore
Riferimenti bibliografici

2 Proprietà della visione e acquisizione delle immagini, *47*

2.1 Premessa
2.2 Struttura dell'occhio umano
2.3 Colori e loro percezione
2.4 Proprietà della visione
2.5 Modello per la visione monocromatica
2.6 Modello per la visione cromatica
2.7 Acquisizione e registrazione ottica e opto-elettronica delle immagini in bianco-nero e a colori
Riferimenti bibliografici

3 Conversione delle immagini in forma numerica e ricostruzione continua, *66*

3.1 Introduzione
3.2 Campionamento spaziale

3.3 Quantizzazione e codifica binaria dei campioni dell'immagine
3.4 Campionamento e quantizzazione non uniformi
3.5 Ricostruzione dell'immagine continua dai campioni
3.6 Sistemi di campionamento usati in pratica
3.7 Sistemi di ricostruzione usati in pratica
3.8 Campionamento, conversione in forma numerica e ricostruzione di immagini a colori
Riferimenti bibliografici

4 Caratterizzazione matematica e analisi delle immagini convertite in forma numerica e dei sistemi numerici, *83*

4.1 Introduzione
4.2 Trasformata $z$ bidimensionale
4.3 Proprietà della trasformata $z$ bidimensionale
4.4 Sistemi a dati campionati o numerici bidimensionali
4.5 Sistemi a dati campionati o numerici con e senza reazione (FIR e IIR)
4.6 Stabilità dei sistemi 2D discreti
Riferimenti bibliografici

5 Trasformazioni numeriche bidimensionali, *93*

5.1 Introduzione
5.2 Generalità sulle trasformazioni numeriche 2D
5.3 Trasformazione di Fourier
5.4 Trasformazioni coseno e seno
5.5 Trasformazioni di Hadamard e Walsh
5.6 Trasformazione di Haar
5.7 Trasformazione *slant*
5.8 Trasformazione di Karhunen-Loeve
5.9 Trasformazione SVD
5.10 Confronto fra le diverse trasformazioni 2D discrete e algoritmi di calcolo veloce
Riferimenti bibliografici

6 Elaborazioni locali spaziali, *107*

6.1 Premessa
6.2 Variazione della quantizzazione dei campioni dell'immagine
6.3 Espansione della scala dei livelli di grigio (esaltazione dei contrasti)
6.4 Espansione dell'immagine
6.5 Distribuzione di ampiezza (istogramma) dei livelli di grigio
6.6 Media aritmetica (filtraggio passa-basso)
6.7 Differenza di livelli di grigio (filtraggio passa-alto)
6.8 Operatori locali spaziali $2 \cdot 2$ e $3 \cdot 3$ per l'estrazione dei contorni
Riferimenti bibliografici

7 Filtraggio numerico, *120*

7.1 Introduzione
7.2 Filtri numerici unidimensionali
7.3 Filtri numerici bidimensionali FIR che usano funzioni 'finestra'
7.4 Filtri numerici bidimensionali con campionamento in frequenza
7.5 Filtri numerici bidimensionali FIR ottenuti con trasformazione da filtri unidimensionali
7.6 Filtri numerici bidimensionali IIR
7.7 Considerazioni di confronto fra i vari tipi di filtri numerici 1D e 2D
Riferimenti bibliografici

8 Riduzione della ridondanza, compressione dei dati, *138*

8.1 Introduzione
8.2 La teoria dell'informazione e la riduzione dei dati (codifica di sorgente)

8.3 Classificazione delle diverse tecniche di riduzione o compressione dei dati
8.4 Campionamento adattivo
8.5 Previsione o interpolazione
8.6 Previsione adattiva
8.7 Modulazione differenziale
8.8 Modulazione delta
8.9 Impiego del filtraggio numerico
8.10 Uso di trasformazioni
8.11 Confronto fra le diverse tecniche di riduzione o compressione dei dati
Riferimenti bibliografici

9 Miglioramento della qualità delle immagini distorte e alterate dal rumore, *153*

9.1 Introduzione
9.2 Uso di operatori locali spaziali
9.3 Filtraggio numerico inverso
9.4 Tecniche con falso colore e pseudocolore
9.5 Filtraggio del tipo di Wiener
9.6 Filtraggio omomorfo
9.7 Filtraggio alla Kalman
9.8 Tecniche di ricostruzione basate sulla massima probabilità a posteriori MAP
9.9 Tecniche di ricostruzione 'cieche'
9.10 Confronto fra le diverse tecniche di ricostruzione e miglioramento della qualità di immagini
Riferimenti bibliografici

10 Riconoscimento di configurazioni, *169*

10.1 Introduzione
10.2 Considerazioni generali sui metodi di riconoscimento di configurazioni
10.3 Metodi di riconoscimento di tipo statistico
10.4 Metodi di riconoscimento di tipo sintattico
10.5 Alcune tecniche particolari di riconoscimento di configurazioni
10.6 Considerazioni di confronto fra le varie tecniche
Riferimenti bibliografici

11 Sistemi di elaborazione numerica delle immagini, *179*

11.1 Introduzione
11.2 Struttura generale di un sistema di elaborazione numerica delle immagini
11.3 Uso di calcolatori standard
11.4 Uso di minicalcolatori
11.5 Uso di microcalcolatori o microprocessori
11.6 Uso di elaboratori speciali
11.7 Uso di circuiti ad alta integrazione o di tipo speciale
11.8 Alcuni sistemi di elaborazione numerica delle immagini
11.9 Considerazioni di confronto fra i vari sistemi di elaborazione numerica delle immagini
Riferimenti bibliografici

12 Programmi di elaborazione, *195*

12.1 Introduzione
12.2 Considerazioni generali sui linguaggi e programmi di elaborazione
12.3 Programmi di elaborazione delle immagini
12.4 Alcuni esempi di programmi di elaborazione
Riferimenti bibliografici

13 Applicazioni nelle comunicazioni e nei sistemi radar, *214*

13.1 Introduzione

13.2 Elaborazione e trasmissione di immagini fisse (facsimile)
13.3 Elaborazione e trasmissione di immagini in movimento
13.4 Sistemi di telemisura e comunicazioni con elaborazioni numeriche integrate
13.5 Telematica
13.6 Elaborazioni numeriche in sistemi radar
Riferimenti bibliografici

## 14 Applicazioni in biomedicina, *289*

14.1 Introduzione
14.2 Immagini fotografiche
14.3 Immagini scintigrafiche di medicina nucleare
14.4 Immagini radiografiche
14.5 Immagini termografiche
14.6 Immagini ecografiche da apparati a ultrasuoni
14.7 Mappe di potenziali
14.8 Immagini tomografiche
14.9 Analisi tridimensionali
Riferimenti bibliografici

## 15 Applicazioni al telerilevamento aerospaziale delle risorse terrestri, *303*

15.1 Introduzione
15.2 Segnali e immagini da sensori e strumenti di telerilevamento
15.3 Elaborazione numerica dei dati di telerilevamento
15.4 Esempi di elaborazione numerica di immagini di telerilevamento in alcuni settori di utilizzazione pratica
15.5 Confronto e correlazione fra immagini di telerilevamento da sensori con diversa risoluzione spaziale
15.6 Considerazioni sull'uso delle varie tecniche di elaborazione per immagini di telerilevamento e simili
Riferimenti bibliografici

## 16 Applicazioni alla robotica, *316*

16.1 Introduzione
16.2 Caratteristiche dei sistemi di acquisizione ed elaborazione di immagini per sistemi robotici
16.3 Esempio di tecnica di elaborazione numerica per il riconoscimento e l'inseguimento di oggetti in movimento in sistemi robotici
Riferimenti bibliografici

## 17 Applicazioni alle opere d'arte, *323*

17.1 Introduzione
17.2 Arte prodotta con calcolatore (computer art)
17.3 Applicazioni dei sistemi e tecniche di elaborazione alle opere d'arte
Riferimenti bibliografici

## 18 Evoluzione e prospettive dell'elaborazione numerica dei segnali e delle immagini, *330*

18.1 Introduzione
18.2 Evoluzione della tecnologia dei dispositivi e sistemi di elaborazione
18.3 Evoluzione degli algoritmi di elaborazione
18.4 Sviluppi applicativi nei diversi settori
Riferimenti bibliografici

*Indice analitico, 337*

# Prefazione

*Questo libro, dedicato all'elaborazione numerica delle immagini, trae origine dagli studi e dalle ricerche che ho sviluppato con i miei collaboratori in molti anni di intensa attività nell'ambito del Dipartimento di Ingegneria elettronica (già Istituto di Elettronica) della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Firenze e dell'Istituto di Ricerca sulle onde elettromagnetiche (IROE, già Centro microonde) del CNR di Firenze, nonché dai corsi universitari che ho tenuto nell'Università di Firenze presso le Facoltà di Ingegneria, di Scienze matematiche, fisiche e naturali e di Medicina sia in indirizzi di laurea sia in scuole di specializzazione e perfezionamento (Elettronica applicata, Teoria dell'informazione, Comunicazioni elettriche, Radioaiuti alla navigazione, Misure elettroniche, Impianti per telecomunicazioni, Informatica e statistica biomedica, Elaborazione delle immagini).*

*In effetti, mentre nella parte introduttiva e generale mi sono avvalso, per la trattazione sistematica dei vari aspetti di base, di libri e articoli esistenti nella letteratura internazionale (alcuni dei quali, peraltro, scritti da me, con collaboratori diversi), nella parte più applicativa e sperimentale ho utilizzato essenzialmente risultati diretti (diversi dei quali originali) di esperienze, ricerche e applicazioni sviluppate negli istituti sopra indicati. Ne deriva un'impostazione globale del libro, dagli aspetti più teorici, di base, ai sistemi pratici di elaborazione, fino alle più importanti applicazioni; impostazione che ritengo interessante e utile per chi voglia entrare in questo nuovo e affascinante "mondo delle immagini".*

*Molti mi hanno aiutato in questa impresa non facile, come del resto testimoniano le numerose citazioni e i riferimenti bibliografici. Sono in debito in particolare per alcuni contributi più significativi.*

*Un ringraziamento speciale va anzitutto al professor Emilio Gatti del Politecnico di Milano per i suoi preziosi consigli e suggerimenti e per le stimolanti discussioni sui diversi temi trattati.*

*Ringrazio poi i miei collaboratori diretti G. Benelli, E. Del Re del Dipartimento*

*di Ingegneria elettronica, e P. L. Emiliani, R. Carlà dell'IROE di Firenze, per l'utile collaborazione su diversi argomenti trattati e per la paziente rilettura del manoscritto.*

*Ringrazio anche A. G. Constantinides del Department of Electrical Engineering dell'Imperial College di Londra, A. N. Venetsanopoulos del Department of Electrical Engineering dell'Università di Toronto, G. Garibotto della 3M Italia, G. Valli del Dipartimento di Ingegneria elettronica di Firenze, M. R. Voeglin dell'Istituto di Medicina nucleare di Firenze, R. Franchi del Centro scientifico di Roma della IBM Italia e S. Bertini, M. Piattelli e G. Calamai della SMA di Firenze per le utili discussioni e per avermi fornito informazioni e materiale sui sistemi di elaborazione e sui risultati sperimentali ottenuti.*

*Voglio infine ringraziare mia moglie Silvana e i miei figli Marco e Alessandro, che quotidianamente hanno sopportato i travagli della stesura del libro, e i miei genitori Masilda e Umberto, il cui esempio mi ha spronato a superare le non poche difficoltà incontrate.*

Firenze, marzo 1985 V. C.

# Introduzione

# Elaborazione numerica dei segnali

ENEA - Bologna
Inv. N. 60471
BIBLIOTECA

## I.1 Premessa

Con il termine *elaborazione del segnale* si intende riferirsi a qualunque trasformazione od operazione, effettuata nel dominio del tempo o della frequenza, su un segnale o messaggio informativo. Esempi tipici di elaborazione del segnale sono le operazioni di analisi spettrale, filtraggio, correlazione e modulazione.

Con l'uso dei segnali numerici o la conversione dei segnali continui o analogici in forma numerica (attraverso le operazioni di campionamento, quantizzazione e codifica binaria) negli ultimi anni si sono sviluppati a ritmo crescente i metodi e le tecniche di elaborazione numerica dei segnali, sostituendo o integrando tecniche più classiche di tipo analogico. Questo sviluppo ed espansione dei metodi e tecniche numeriche è dovuto a diversi motivi:

– definizione di algoritmi di elaborazione numerica efficienti e veloci;

– realizzazione e disponibilità di adeguati sistemi di conversione analogico-numerici (CAN) e numerico-analogici (CNA) relativamente economici;

– sviluppo ed espansione dei calcolatori standard, dei minicalcolatori, dei microprocessori o microcalcolatori e di elaboratori speciali con circuiti ad alta e altissima integrazione (*large scale integration*, LSI; *very large scale integration*, VLSI) o altri dispositivi, a costi decrescenti;

– maggiore flessibilità, adattabilità e sicurezza delle tecniche di elaborazione numerica per le diverse applicazioni.

Nel seguito vengono prima richiamati sinteticamente gli aspetti salienti dell'analisi ed elaborazione continua o analogica dei segnali; sono quindi descritte le operazioni di conversione dei segnali in forma numerica e di ricostruzione continua, la caratterizzazione matematica dei segnali numerici (mediante la trasformata $z$), i principali algoritmi di elaborazione numerica (essenzialmente filtraggio numerico con cenni alla riduzione dei dati e al riconoscimento di forme). Sono infine indicati i settori appli-

cativi più importanti delle tecniche di elaborazione numerica (comunicazioni, radar, biomedicina).

## I.2 Analisi ed elaborazione continua dei segnali

Segnali elettrici variabili in modo continuo nel tempo o più in generale grandezze fisiche funzioni continue di una variabile possono essere adeguatamente rappresentate in forma matematica come funzioni continue $f(x)$ di una variabile $x$. Ci limitiamo nel seguito a considerare segnali o grandezze fisiche variabili in modo continuo nel tempo, rappresentate dalla funzione $f(t)$, essendo la trattazione facilmente estendibile al caso di variabili diverse dal tempo.

Si possono sviluppare due tipi principali di analisi (presentate sinteticamente nel seguito):

– analisi deterministica, nella quale viene considerata una funzione univoca, che rappresenta il segnale a ogni istante $t$ (è il caso di segnali senza rumore);

– analisi statistica o aleatoria, nella quale le proprietà del segnale sono definite in modo statistico o aleatorio con un'opportuna funzione probabilità (è il caso dei segnali con disturbi o rumore).

In entrambi i casi è di fondamentale interesse l'uso della trasformata di Fourier, in base alla quale si può anche impostare lo studio dei sistemi lineari.

### I.2.1 Trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier della funzione $f(t)$ reale o complessa, ammessa a modulo integrabile – cioè tale che $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ sia di valore finito –, è definita dalla relazione (De Castro, 1968):

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \qquad [I.1]$$

dove $\omega=2\pi\nu$ è la frequenza angolare o pulsazione, essendo $\nu$ la frequenza (numero di oscillazioni sinusoidali per secondo), e $j$ è l'operatore complesso ($j=\sqrt{-1}$).

Simbolicamente la trasformata $F(\omega)$ può essere espressa come risultato dell'applicazione di un operatore $T_F\{\cdot\}$ alla funzione $f(t)$:

$$F(\omega)=T_F\{f(t)\}. \qquad [I.2]$$

In genere la trasformata $F(\omega)$ è una quantità complessa, che può essere scomposta nella sua parte reale $\mathrm{Re}(\omega)$ e immaginaria $\mathrm{Im}(\omega)$:

$$F(\omega)=\mathrm{Re}(\omega)+j\,\mathrm{Im}(\omega) \qquad [I.3]$$

oppure nel modulo e fase:

$$F(\omega)=|F(\omega)|\,e^{-j\varphi(\omega)}, \qquad [I.4]$$

dove è:

$$|F(\omega)|=\sqrt{\mathrm{Re}^2(\omega)+\mathrm{Im}^2(\omega)} \qquad [I.5]$$

$$\varphi(\omega)=\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{Im}(\omega)}{\mathrm{Re}(\omega)}. \qquad [I.6]$$

Nelle ipotesi sopra indicate, la funzione $f(t)$ può essere riottenuta dalla sua trasformata di Fourier mediante la relazione inversa:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\,e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \qquad [I.7]$$

oppure in forma di operatore inverso:

$$f(t)=T_F^{-1}\{F(\omega)\}. \qquad [I.8]$$

Le funzioni $f(t)$ e $F(\omega)$ sono chiamate coppie di trasformate di Fourier. Inoltre la [I.7] ci dice che la funzione $f(t)$ è esprimibile come somma di un numero infinito di oscillazioni sinusoidali elementari, la cui ampiezza, infinitesima, vale:

$$\frac{1}{2\pi}F(\omega)\,\mathrm{d}\omega. \qquad [I.9]$$

La [I.9] viene detta componente armonica di $f(t)$; $F(\omega)$, che esprime la distribuzione delle componenti armoniche della funzione $f(t)$ sull'asse delle frequenze, è anche detta spettro di $f(t)$.

Di seguito sono elencate le proprietà principali della trasformata di Fourier (Biglieri, Benedetto, 1977).

*Linearità*

L'operatore $T_F$, che associa alla funzione $f(t)$ la sua trasformata di Fourier, è lineare; si ha cioè la proprietà:

$$T_F\{af_1(t)+bf_2(t)\}=aT_F\{f_1(t)\}+bT_F\{f_2(t)\} \qquad [I.10]$$

per cui lo spettro di un segnale che sia combinazione lineare di due o più segnali risulta combinazione lineare dei singoli spettri.

*Trasformata di funzione complessa coniugata*

La trasformata di Fourier della funzione $f^*(t)$, complessa coniugata di $f(t)$, risulta:

$$T_F\{f^*(t)\}=F^*(-\omega) \qquad [I.11]$$

essendo $F^*(\omega)$ la forma complessa coniugata della trasformata $F(\omega)$. (Con il simbolo asterisco si denota la forma complessa coniugata della funzione considerata.)

*Trasformata di funzione reale*

Per ogni funzione $f(t)$ reale è immediato verificare che:

$$F(-\omega)=F^*(\omega) \qquad [I.12]$$

ovvero che la trasformata di Fourier per $\omega<0$ è la forma complessa coniugata della trasformata per $\omega>0$. Pertanto una funzione $f(t)$ reale ha trasformata di Fourier con modulo simmetrico e fase antisimmetrica rispetto alla frequenza zero.

Più in particolare, se $f(t)$ è simmetrica, la [I.12] diviene:

$$F(-\omega)=F(\omega) \qquad [I.13]$$

*Variazione di scala*

Una variazione di scala lineare della variabile tempo dà luogo a una variazione inversa delle frequenze angolari, cioè (con $a$ e $b$ costanti):

$$T_F\ \{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right). \qquad [I.14]$$

Pertanto l'espansione lungo un asse in un dominio dà luogo alla *contrazione* lungo il corrispondente asse nell'altro dominio, unitamente a una variazione di ampiezza.

*Traslazione o spostamento temporale*

Una traslazione o spostamento nel tempo del segnale $f(t)$ dà luogo a una variazione di fase della trasformata, cioè:

$$T_F\{f(t-a)\}=F(\omega)e^{-j\omega a} \qquad [I.15]$$

essendo $a$ una costante. Analogamente, per una variazione di frequenza, si ha:

$$T_F^{-1}\ \{F(\omega-a)\}=f(t)\,e^{jat} \qquad [I.16]$$

*Convoluzione*

Supponiamo che un segnale $g(t)$ sia ottenuto come convoluzione, o prodotto integrale, di due funzioni $f(t)$ e $h(t)$; poniamo cioè:

$$g(t)=f(t)\circledast h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)\,d\tau \qquad [I.17]$$

dove il simbolo $\circledast$ denota appunto l'operazione di convoluzione.

Si può agevolmente verificare che la trasformata di Fourier della $g(t)$ risulta uguale al prodotto delle trasformate di $f(t)$ e $h(t)$, cioè:

$$G(\omega)=H(\omega)F(\omega) \qquad [I.18]$$

avendo indicato con $G(\omega)$ la trasformata di $g(t)$ e con $H(\omega)$ la trasformata di $h(t)$.

*Teorema di Parseval*

Consideriamo un segnale, rappresentato dalla funzione $f(t)$, avente energia finita. Per definizione la sua energia è espressa da:

$$E_n\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) \,\mathrm{d}t. \qquad [I.19]$$

Si può provare che tale energia è esprimibile in funzione della trasformata di Fourier di $f(t)$. Più esattamente si ha (*uguaglianza di Parseval*):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega. \qquad [I.20]$$

Considerando un altro segnale, rappresentato dalla funzione $g(t)$, è anche possibile provare l'uguaglianza generalizzata di Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g^*(t) \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G^*(\omega) \,\mathrm{d}\omega. \qquad [I.21]$$

*Autocorrelazione*

Dato il segnale $f(t)$, la sua funzione di autocorrelazione viene definita dal seguente integrale:

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t+\tau) \,\mathrm{d}t. \qquad [I.22]$$

Si può provare che la trasformata di Fourier della $C(\tau)$ è uguale al modulo quadrato della trasformata di $f(t)$, cioè:

$$T_F\{C(\tau)\} = |F(\omega)|^2. \qquad [I.23]$$

Riferendosi a un determinato intervallo temporale $T_0$, nel quale si suppone definito $f(t)$ reale, la densità spettrale di potenza $P_f(\omega) = |F(\omega)|^2/T_0$ è uguale alla trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione $C_0(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) f(t+\tau) \,\mathrm{d}t$.

*Derivata*

La derivata temporale del segnale $f(t)$ ha trasformata di Fourier espressa dalla seguente relazione:

$$T_F\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right\} = j\omega F(\omega). \qquad [I.24]$$

### I.2.2 Sistemi lineari

Un sistema è, nella sua forma più generale, definito da un operatore $T$ che fa corrispondere a un segnale d'ingresso $f(t)$ un segnale di uscita $g(t)$, cioè (Atzeni,Cappellini, 1972):

$$g(t)=T\{f(t)\} \qquad [I.25]$$

Sono noti operatori speciali diversi. Un operatore speciale di notevole interesse è rappresentato dall'operatore "delta di Dirac" $\delta(t)$, che ha le seguenti proprietà di definizione:

$$\begin{cases} \delta(t)=0 & \text{per} \quad t\neq 0 \qquad [I.26] \\ \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t)\,dt=1 & \text{per} \quad \epsilon>0 \qquad [I.27] \end{cases}$$

essendo $\epsilon$ un numero comunque piccolo.

L'operatore $\delta(t)$ può essere ottenuto come limite di diverse funzioni. In particolare si può ottenere come limite della funzione rettangolare (rect):

$$\delta(t)=\lim_{\alpha\to\infty}[\alpha\,\mathrm{rect}\{\alpha t\}] \qquad [I.28]$$

dove è:

$$\mathrm{rect}\{t\}=\begin{cases} 1 & \text{per} \quad |t|\leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{per} \quad |t|>\frac{1}{2} \end{cases}$$

e della funzione sinc$\{t\}$:

$$\delta(t)=\lim_{\alpha\to\infty}\mathrm{sinc}\{\alpha t\}. \qquad [I.29]$$

dove è:

$$\mathrm{sinc}\{t\}=\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}.$$

Un sistema è detto lineare additivo se per esso vale la legge di sovrapposizione degli effetti, cioè:

$$T\{a_1f_1(t)+a_2f_2(t)+\cdots+a_nf_n(t)\}=a_1T\{f_1(t)\}+a_2T\{f_2(t)\}+\cdots+a_nT\{f_n(t)\} \qquad [I.30]$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono costanti reali o complesse.

Tornando a considerare l'operatore delta di Dirac, esso permette di estrarre deter-

minati valori dal segnale $f(t)$; si ha infatti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-a)\,\mathrm{d}t = f(a) \tag{I.31}$$

essendo $a$ una costante. In particolare risulta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t)\,\mathrm{d}t = f(0). \tag{I.32}$$

Utilizzando la relazione [I.31], esprimiamo il segnale $f(t)$, in ingresso al sistema (tenendo conto che $\delta(-t)=\delta(t)$):

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\delta(\tau-t)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{I.33}$$

Se l'uscita $g(t)$ del sistema è definita dalla [I.25], si avrà:

$$g(t) = T\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} \tag{I.34}$$

ovvero, rovesciando l'ordine di applicazione dell'operatore $T$ e dell'integrale:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,T\{\delta(t-\tau)\}\,\mathrm{d}\tau. \tag{I.35}$$

Il secondo termine della funzione integranda, definito da:

$$h(t;\tau) = T\{\delta(t-\tau)\} \tag{I.36}$$

è chiamato "risposta impulsiva" o "risposta indice" del sistema. Sostituendo la [I.36] nella [I.35], si ha:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,h(t;\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{I.37}$$

Un sistema lineare additivo è detto temporalmente invariante, se la sua risposta impulsiva dipende solo dai valori $t-\tau$. Per un tale sistema si ha:

$$h(t;\tau) = h(t-\tau) \tag{I.38}$$

e l'integrale [I.37] si riduce al caso ben noto e importante dell'integrale di convoluzione (già considerato: vedi [I.17]).

Per la proprietà [I.18] della trasformata di Fourier, la trasformata del segnale di uscita da un sistema lineare additivo si può ottenere moltiplicando la trasformata del

segnale d'ingresso per la trasformata $H(\omega)$ della risposta impulsiva. Analogamente, conoscendo le trasformate dei segnali di ingresso e uscita, si può ottenere la $H(\omega)$:

$$H(\omega)=\frac{G(\omega)}{F(\omega)} \qquad [I.39]$$

che viene anche chiamata "risposta in frequenza" del sistema considerato. Tale sistema è pertanto perfettamente individuato, quando si conosca la sua risposta impulsiva $h(t)$, che ne specifica il comportamento temporale, o la sua risposta in frequenza (o *funzione di trasferimento*) $H(\omega)$, che ne specifica il comportamento frequenziale. In particolare, conoscendo la $H(\omega)$, si ha un'altra relazione, oltre alla [I.17], che permette di ottenere l'uscita $g(t)$:

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega. \qquad [I.40]$$

Le relazioni precedenti (in particolare le [I.17], [I.39], [I.40]) costituiscono la base fondamentale dello studio dei sistemi lineari additivi.

Una classe di sistemi lineari additivi di particolare interesse è rappresentata dai sistemi "non distorcenti". Un sistema è detto non distorcente se, da un segnale $f(t)$ di ingresso, fornisce un segnale $g(t)$ di uscita del tipo:

$$g(t)=Af(t-t_0) \qquad [I.41]$$

dove $A$ e $t_0$ sono opportune costanti, cioè se i valori del segnale di ingresso sono stati semplicemente spostati con traslazione costante nel tempo e moltiplicati per un fattore pure costante. Non è difficile provare che, per un tale sistema, la risposta in frequenza o funzione di trasferimento $H(\omega)$ obbedisce alle seguenti condizioni di non distorsione:

$$|H(\omega)|=A \qquad [I.42]$$

$$\psi(\omega)=\omega t_0 \qquad [I.43]$$

cioè ha il modulo costante e uguale ad $A$ e la fase $\psi(\omega)$ lineare.

### I.2.3 Analisi statistica dei segnali

Segnali con rumore o disturbi di vario tipo non sono rappresentabili in modo univoco da funzioni determinate $f(t)$ del tipo considerato nei precedenti paragrafi. Non è, pertanto, sufficiente l'analisi deterministica svolta, ma occorre sviluppare un'analisi di tipo statistico (Atzeni, Cappellini, 1972; Benelli, Cappellini, Del Re, 1976).

Riferendoci a segnali con rumore o aleatori, le funzioni $f(t)$ corrispondenti vengono considerate facenti parte di un processo aleatorio o stocastico continuo nella variabile temporale $t$. Tale processo aleatorio può essere definito mediante la sua densità di

probabilità congiunta $p\{f_1, f_2, ..., f_m; t_1, t_2, ..., t_m\}$ per tutti i campioni temporali $t_i, i=1, 2, ..., m$.

In genere non sono note densità di probabilità di ordine elevato. La densità di probabilità del primo ordine $p\{f; t\}$ può invece essere approssimata attraverso la conoscenza del processo fisico in esame (con adeguati modelli) o con misure sperimentali (le funzioni probabilità possono essere misurate in forma approssimata attraverso le così dette "frequenze statistiche": numero di volte che un determinato livello di ampiezza si presenta in un certo intervallo di osservazione).

Un processo aleatorio di particolare interesse (come approssimazione di diversi tipi di rumore fisico) è rappresentato dal processo gaussiano, per il quale la densità di probabilità del primo ordine risulta espressa da:

$$p\{f; t\} = [2\pi\sigma_f^2(t)]^{-1/2} e^{-\frac{[f(t)-\eta_f(t)]^2}{2\sigma_f^2(t)}} \qquad [I.44]$$

dove i parametri $\eta_f(t)$ e $\sigma_f^2(t)$ indicano la media e la varianza del processo.

Per descrivere un processo aleatorio sono inoltre utili i suoi valori medi: valore medio temporale, o media temporale, e valore medio statistico, o d'insieme, o media statistica (Atzeni, Cappellini, 1972). Analogamente può essere utile la funzione di autocorrelazione $C(\tau)$ o $C_0(\tau)$ che si può dimostrare essere la trasformata di Fourier inversa della densità spettrale di potenza $P_f(\omega)$, a sua volta definita dal modulo quadro dello spettro, cioè da $|F(\omega)|^2$ (vedi il teorema di Parseval [I.20] e [I.23]).

Nell'analisi ed elaborazione di segnali con rumore, sono utili modelli strutturali più o meno complessi, nei quali viene schematizzato il processo con cui il segnale senza rumore (non noto, ma "desiderato") risulta alterato da rumore e disturbi di vario tipo.

Un modello strutturale assai generale è definito dalla seguente relazione:

$$f_r(t) = f(t) n_m(t) + n_a(t) \qquad [I.45]$$

dove $f(t)$ rappresenta il segnale senza rumore, $f_r(t)$ il segnale alterato dal rumore moltiplicativo $n_m(t)$ e dal rumore additivo $n_a(t)$.

Un altro modello significativo per diversi problemi pratici di elaborazione dei segnali è definito dalla relazione seguente:

$$f_r(t) = f(t) \circledast h(t) + n_a(t) \qquad [I.46]$$

dove $h(t)$ è la risposta impulsiva di un sistema lineare (in genere non conosciuta) e gli altri termini sono come nella [I.45]. L'estrazione dal rumore implica qui una "deconvoluzione" non facile, non essendo noti $h(t)$ e $n_a(t)$. Nel dominio trasformato la [I.46] diviene:

$$F_r(\omega) = F(\omega) H(\omega) + N_a(\omega) \qquad [I.47]$$

essendo $H(\omega)$ la funzione di trasferimento del sistema lineare avente risposta impulsiva $h(t)$.

In sintesi, il problema fondamentale dell'elaborazione di segnali con rumore, rappresentati da modelli strutturali più o meno complessi del tipo sopra indicato, implica la definizione e applicazione di opportuni operatori, filtri di estrazione dal rumore, definiti nel dominio temporale o frequenziale.

## I.3 Conversione dei segnali in forma numerica e ricostruzione continua

Un aspetto estremamente importante dell'elaborazione numerica dei segnali è rappresentato dalla conversione in forma numerica dei segnali stessi (conversione analogico-numerica, CAN). Tale conversione comprende tre operazioni fondamentali: campionamento temporale, quantizzazione, codifica (in genere binaria).

Nel seguito sono descritte le operazioni precedenti, con particolare riferimento al campionamento, che è la prima e più importante di esse. E' brevemente considerato anche il problema inverso della ricostruzione del segnale continuo dai campioni o dalla sua rappresentazione numerica (conversione numerico-analogica, CNA).

### I.3.1 Campionamento temporale

Consideriamo un segnale, rappresentato dalla funzione continua $f(t)$, quale precedentemente trattata. In un'operazione di campionamento temporale ideale, i campioni del segnale sono ottenuti moltiplicando la funzione $f(t)$ per una funzione di campionamento del tipo:

$$c(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\Delta T) \qquad [I.48]$$

composta di un numero infinito di operatori di Dirac, disposti nel tempo a istanti discreti distanti di $\Delta T$ uno dall'altro. Il segnale campionato viene così a essere rappresentato nella forma seguente:

$$f_c(t)=f(t)c(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n\Delta T)\delta(t-n\Delta T) \qquad [I.49]$$

avendo portato la funzione $f(t)$ entro la sommatoria, ove, per la proprietà dell'operatore di Dirac (si veda la [I.31]), rimane definita solo negli istanti di campionamento. I valori così ottenuti $f(n\Delta T)$ sono chiamati campioni temporali (o semplicemente campioni) del segnale $f(t)$.

Se ammettiamo che il segnale $f(t)$ abbia spettro $F(\omega)$ di estensione finita, ad esempio che sia nullo al di fuori della banda di pulsazioni $(-2\pi B, 2\pi B)$, cioè nella banda di frequenze $(-B, B)$, si può dimostrare (teorema di Shannon) che il segnale è completamente determinato, quando siano conosciuti i suoi valori o campioni in corrispondenza di una successione di istanti equispaziati, separati tra loro da un intervallo temporale di durata non superiore a $1/(2B)$. La dimostrazione del teorema, nel

caso limite $\Delta T = T_c = 1/(2B)$ può svilupparsi come segue (Atzeni, Cappellini, 1972).

Poiché $F(\omega)=0$ per $|\omega|>2\pi B$, lo spettro periodico $F_s(\omega)$, ottenuto ripetendo $F(\omega)$ con periodo $4\pi B$, risulta espresso dalla seguente serie di Fourier:

$$F_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\frac{\omega}{2B}} \qquad [I.50]$$

ove $2\pi/(4\pi B) = 1/(2B)$ è la pulsazione fondamentale dello sviluppo (De Castro, 1968) e i coefficienti $c_n$ sono dati da:

$$c_n = \frac{1}{4\pi B} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} F(\omega) e^{-jn\frac{\omega}{2B}} \, d\omega, \qquad [I.51]$$

essendo $F_s(\omega) = F(\omega)$ nell'intervallo $(-2\pi B, 2\pi B)$.

La serie [I.50] rappresenta $F(\omega)$ nell'intervallo $(-2\pi B, 2\pi B)$ e la sua ripetizione infinita sull'asse $\omega$ da $-\infty$ a $\infty$ con periodo $4\pi B$.

Quando i coefficienti $c_n$ sono noti, è noto anche $F_s(\omega)$ dalla [I.50] e di conseguenza è possibile calcolare $f(t)$ come antitrasformata di Fourier di $F(\omega)$, essendo $F_s(\omega) = F(\omega)$ nell'intervallo $(-2\pi B, 2\pi B)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} F(\omega) e^{j\omega t} \, d\omega. \qquad [I.52]$$

Supponiamo ora che siano noti i valori assunti da $f(t)$ negli istanti:

$$t_n = \frac{n}{2B}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad [I.53]$$

valori dati da:

$$f\left(\frac{n}{2B}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} F(\omega) e^{jn\frac{\omega}{2B}} \, d\omega. \qquad [I.54]$$

Dal confronto delle [I.51] e [I.54], si riconosce che i coefficienti $c_n$ sono legati ai valori dei "campioni" $f\left(\frac{n}{2B}\right)$ di $f(t)$ dalla semplice relazione:

$$c_n = \frac{1}{2B} f\left(-\frac{n}{2B}\right). \qquad [I.55]$$

Se quindi si conoscono i campioni [I.54] di $f(t)$, sono univocamente determinati anche i coefficienti $c_n$ e di conseguenza, dalla [I.50], risulta univocamente determinato $F_s(\omega)$ e lo spettro $F(\omega)$ del segnale. La sostituzione dello spettro così calcolato nella [I.52] permette, infine, di determinare univocamente $f(t)$ per ogni valore di $t$.

Risulta quindi dimostrato che la conoscenza dei campioni del segnale negli istanti [I.53] permette di risalire alla conoscenza di $f(t)$ in ogni istante.

Si può facilmente trovare anche l'espressione della $f(t)$ ricostruita dai suoi campioni. Sostituendo nella [I.52] l'espressione [I.50] di $F_s(\omega)$ (uguale a $F(\omega)$ nell'intervallo $(-2\pi B, 2\pi B)$) e tenendo conto della [I.55], si ottiene:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2B}\right)\frac{\sin\left[2\pi B\left(t-\frac{n}{2B}\right)\right]}{2\pi B\left(t-\frac{n}{2B}\right)}. \qquad [I.56]$$

Quest'espressione mostra che $f(t)$ può essere ottenuta dai valori $f\left(\frac{n}{2B}\right)$ dei suoi campioni, sommando una successione di funzioni del tipo:

$$I(t)=\frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt} \qquad [I.57]$$

centrate negli istanti di campionamento e aventi ivi ampiezza massima pari a $f\left(\frac{n}{2B}\right)$.

La [I.56] mostra anche che $f(t)$ può interpretarsi come l'uscita di un filtro passa-basso ideale, di pulsazione di taglio $2\pi B$ (avente appunto risposta impulsiva del tipo sinc), al cui ingresso sia applicata la sequenza di campioni $f\left(\frac{n}{2B}\right)$. In sostanza, lo spettro dei campioni è costituito dalla ripetizione periodica dello spettro $F(\omega)$ con passo $4\pi B$ in pulsazione: il filtro passa-basso lascia passare la banda fondamentale $(-2\pi B, 2\pi B)$ ed elimina le bande armoniche.

Da quanto sopra mostrato, si deduce anche che un campionamento con passo $T_c < 1/(2B)$ permette sempre la ricostruzione di $f(t)$, mentre questa non è più possibile per un campionamento con $T_c > 1/(2B)$: nel primo caso è infatti possibile riestrarre isolato lo spettro fondamentale $F(\omega)$, mentre ciò non è possibile nel secondo caso, avendosi sovrapposizione degli spettri (condizione nota anche come di "aliasing").

In sostanza le condizioni di corretto campionamento sono espresse dalle seguenti relazioni equivalenti:

$$T_c \leq \frac{1}{2B} \qquad [I.58]$$

$$\nu_c \geq 2B \qquad [I.59]$$

cioè la frequenza di campionamento $\nu_c$ deve essere uguale o maggiore del doppio della frequenza massima.

### I.3.2 Quantizzazione e codifica binaria

Il campionamento temporale sopra indicato permette di trasformare il segnale $f(t)$ in un insieme discreto di valori $f(nT_c)=f(n)$, campioni del segnale. Con il campionamento viene così interrotta la continuità dei valori sull'asse temporale (senza perdita d'informazione – è utile ricordare – se il campionamento è effettuato correttamente in accordo con le relazioni [I.58] e [I.59]).

Per arrivare alla forma numerica compatibile con i sistemi di elaborazione, occorre effettuare altre due operazioni: quantizzazione e codifica binaria.

La quantizzazione consiste nel rappresentare i singoli campioni $f(n)$ con un numero finito di livelli (valori quantizzati) $1 \leq i \leq Q$ di ampiezza, essendo i livelli possibili $a_i$ tali che:

$$a_1 \leq a_i \leq a_Q \qquad [1.60]$$

dove $a_1$ è il valore minimo (generalmente 0) e $a_Q$ il valore massimo dei livelli di ampiezza. Si hanno pertanto $Q$ livelli quantizzati, che rappresentano le diverse ampiezze del segnale, essendo l'errore di quantizzazione $\epsilon_q$ (normalizzato all'ampiezza massima) funzione inversa di $Q(\epsilon_q = a_Q/Q)$.

Il segnale risulta così trasformato in una sequenza di numeri interi. Per arrivare ad una forma compatibile con i sistemi di elaborazione, occorre rappresentare tali numeri in forma codificata acquisibile dai sistemi stessi. Benché siano note molte forme di codifica dei numeri interi, viene in genere usata la forma binaria con due simboli (bit 0 e 1). Si fa, più in particolare, in modo che $Q$ sia potenza del 2, cioè:

$$Q = 2^m$$

essendo $m$ il numero di simboli binari utilizzati per rappresentare il campo numerico da 1 a $Q$ (oppure da 0 a $Q-1$). In questo modo i campioni $f(n)$ divengono gruppi o parole di $m$ simboli binari, essendo il livello discreto o numerico generico $i$ rappresentato dall'espressione binaria (codifica binaria):

$$i = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k 2^k \qquad [1.61]$$

ove i coefficienti $\alpha_k$ hanno valore binario (0 oppure 1), in modo da mantenere o meno nella sommatoria la potenza del 2 corrispondente per ottenere la rappresentazione esatta del numero intero (tale rappresentazione corrisponde in effetti a numeri interi che vanno da 0 a $2^m - 1$).

Considerando $\epsilon_q$ come un rumore che si sovrappone al segnale, si può dimostrare (Cappellini, Constantinides, Emiliani, 1978) che il rapporto segnale/rumore risultante è espresso da:

$$\frac{S}{N} = \frac{\sigma_f^2}{\sigma_n^2} = 12[2^{2m} \sigma_f^2] \qquad [1.62]$$

essendo $\sigma_f$ e $\sigma_n$ la varianza, rispettivamente, del segnale e del rumore di quantizzazione.

## I.4 Caratterizzazione matematica e analisi dei segnali convertiti in forma numerica e dei sistemi numerici

I segnali campionati o convertiti in forma numerica sono adeguatamente caratterizzati matematicamente mediante l'uso della trasformata $z$. Nel seguito viene definita tale trasformata con le sue principali proprietà; sono anche descritte le proprietà principali degli *operatori e sistemi numerici*, definiti nel dominio della variabile $z$ e della frequenza.

### I.4.1 Trasformata $z$

Dato un segnale campionato o numerico, o più in generale una sequenza di dati $f(n) \neq 0$ per $0 \leqslant n \leqslant \infty$ (la sequenza è detta "causale"), la sua trasformata $z$ viene definita dalla seguente relazione (Cappellini, Constantinides, Emiliani, 1978):

$$Z\{f(n)\} = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n} \qquad [I.63]$$

ove $z$ è una variabile complessa, collegata alla variabile di Laplace $p$ e al passo di campionamento temporale $T_c$ dalla seguente espressione:

$$z = e^{pT_c} = e^{(\sigma + j\omega)T_c}, \qquad [I.64]$$

essendo $\sigma$ la parte reale e $j\omega$ la parte immaginaria della variabile di Laplace $p$.

La trasformata $z$ inversa è definita dalla seguente relazione:

$$f(n) = \frac{1}{2\pi j} \int_C F(z) z^{n-1} \mathrm{d}z \qquad [I.65]$$

ove $C$ è un contorno chiuso intorno all'origine entro la regione di convergenza.

Alcune delle più importanti proprietà della trasformata $z$ sono di seguito riportate.

*Linearità*

L'operatore $Z$, che associa alla sequenza $f(n)$ la sua trasformata $z$, è lineare; si ha cioè:

$$Z\{af(n) + bg(n)\} = aZ\{f(n)\} + bZ\{g(n)\} = aF(z) + bG(z) \qquad [I.66]$$

per cui vale il principio di sovrapposizione.

*Traslazione*

Una traslazione nella sequenza $f(n)$ (spostamento nel tempo dei campioni del segnale considerato) del tipo $f(n-m)$ dà luogo alla seguente trasformata:

$$Z\{f(n-m)\} = z^{-m} F(z).$$

*Convoluzione discreta*

Consideriamo una sequenza $g(n)$ ottenuta dalla seguente relazione, che contiene le due sequenze $f(n)$ e $h(n)$ (convoluzione discreta):

$$g(n)=\sum_{k=0}^{\infty} h(k)f(n-k). \qquad [I.67]$$

Si può mostrare (Cappellini, Constantinides, Emiliani, 1978) che la trasformata $z$ della sequenza $g(n)$ è espressa da:

$$G(z)=H(z)F(z), \qquad [I.68]$$

cioè risulta il prodotto delle trasformate delle due sequenze $f(n)$ e $h(n)$.

Per maggiore semplicità formale, nel seguito si farà riferimento alle frequenze angolari o frequenze normalizzate $\omega/\omega_c$ (essendo $\omega_c=2\pi\nu_c=2\pi/T_c$), che corrisponde a considerare $T_c=1$. In questa notazione la relazione [I.64] diviene più semplicemente (con $\sigma=0$):

$$z=e^{j\omega}. \qquad [I.69]$$

Volendo tornare alla scala assoluta delle frequenze, basta inserire nuovamente il passo di campionamento $T_c$ (o frequenza di campionamento $\nu_c$).

### I.4.2 Sistemi a dati campionati o numerici

Un sistema a dati campionati, discreto o numerico (il termine numerico si riferisce al caso in cui i dati campionati o discreti sono espressi in forma numerica), è, nella sua forma più generale, definito da un operatore $T_C\{\cdot\}$ che fa corrispondere a una sequenza (segnale campionato) d'ingresso $f(n)$ una sequenza (segnale campionato) di uscita $g(n)$, cioè:

$$g(n)=T_C\{f(n)\}. \qquad [I.70]$$

Un sistema a dati campionati è detto lineare additivo (o, semplicemente, lineare), se per esso vale la legge di sovrapposizione degli effetti:

$$T_C\{a_1f(n)+a_2f_2(n)+\cdots+a_nf_n(n)\}=a_1T_C\{f_1(n)\}+a_2T_C\{f_2(n)\}+\cdots+ \\ +a_nT_C\{f_n(n)\} \qquad [I.71]$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono costanti reali o complesse.

Si possono poi definire sistemi a dati campionati temporalmente invarianti, cioè tali che alla sequenza di ingresso $f(n-k)$ corrisponde in uscita la sequenza $g(n-k)$ e per i quali la sequenza di uscita è indipendente dalla posizione temporale di uguali dati di ingresso.

L'uscita $g(n)$ di un sistema a dati campionati, che sia definito da una sequenza $h(n)$ (uscita del sistema quando in ingresso è presentato un valore singolo unitario

$\delta(n)=1$), quando sia presente in ingresso la sequenza $f(n)$, è espressa dalla seguente relazione:

$$g(n)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)h(n-k)=\sum_{k=0}^{\infty} h(k)f(n-k) \qquad [I.72]$$

che rappresenta la convoluzione discreta [I.67].

Il sistema è quindi individuato dalla trasformata $z$ di $h(k)$ o $h(n)$, espressa da:

$$H(z)=\sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k} \qquad [I.73]$$

che, interpretata in frequenza (relazione [I.69]), ha l'espressione:

$$H(e^{j\omega})=H(\omega)=\sum_{k=0}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} \qquad [I.74]$$

la cui interpretazione fisica è agevole e immediata.

Una classe più generale di sistemi a dati campionati è definita dalla seguente relazione (nella quale vengono riutilizzati dei dati di uscita):

$$g(n)=\sum_{k=0}^{\infty} a(k)f(n-k)-\sum_{k=1}^{\infty} b(k)g(n-k) \qquad [I.75]$$

ove $a(k)$ e $b(k)$ sono le sequenze che definiscono il comportamento del sistema (nella seconda sommatoria, $k$ parte da 1 per escludere il dato $g(n)$). Non è difficile verificare che la $H(z)$ di un sistema di questo tipo è espressa da:

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{\infty} a(k)z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{\infty} b(k)z^{-k}}. \qquad [I.76]$$

Sistemi specificati dalle [I.72] e [I.73] sono detti trasversali o non ricorrenti e hanno in genere una risposta impulsiva $h(k)$ finita (FIR); sistemi specificati dalle [I.75] e [I.76] sono detti ricorrenti o ricorsivi, e hanno in genere una risposta impulsiva infinita (IIR).

I sistemi ricorrenti sono caratterizzati dal fatto che elaborano, come già osservato, anche alcuni dati di uscita e quindi da una reazione intrinseca nel sistema, mentre i non ricorrenti elaborano solo i dati di ingresso effettivi $f(n)$. Nei sistemi ricorrenti intervengono, pertanto, tutti i problemi tipici dei sistemi con reazione, e in particolare i problemi di stabilità. In pratica ciò porta, a livello numerico, a problemi di degenerazione dell'uscita (che può assumere valori divergenti fino all'innescarsi di vere e proprie oscillazioni), connessi alla precisione di rappresentazione dei dati di ingresso, di uscita e delle sequenze $a(k)$, $b(k)$. Ad esempio, una precisione insufficiente può portare, con le successive ri-elaborazioni, a una degradazione della rappresentazione dei dati, con errori finali di uscita intollerabili.

Le considerazioni sopra riportate fanno capire come il progetto di sistemi numerici (ad esempio filtri numerici) del tipo non ricorrente o FIR non abbia problemi di stabilità e precisione nelle rappresentazioni dei dati, mentre il progetto di sistemi del tipo ricorrente IIR abbia invece tali problemi, da verificare accuratamente. D'altra parte, il vantaggio dei sistemi IIR risiede nel fatto che, proprio per la reazione intrinseca nel loro funzionamento, per cui vengono riutilizzati già gli ultimi dati elaborati, essi richiedono un minor numero di parametri $a(k)$, $b(k)$ o di coefficienti per definire — con una certa funzione di trasferimento desiderata — i valori di uscita (Cappellini, Constantinides, Emiliani, 1978).

## I.5 Trasformazioni numeriche e algoritmi di elaborazione numerica

In accordo con le considerazioni precedentemente riportate sui segnali numerici e sistemi a dati campionati o numerici, si possono definire diverse trasformazioni numeriche e algoritmi di elaborazione numerica.

Riportiamo di seguito brevi cenni a tali trasformazioni e algoritmi, che saranno trattati in dettaglio (anche per il caso unidimensionale dei segnali) nella parte principale del testo, dedicata alle immagini.

### I.5.1 Trasformazioni numeriche

E' possibile definire agevolmente, derivandola dalla trasformata di Fourier continua (§ I.2.1), o come nuova definizione, la trasformata di Fourier discreta (DFT), espressa da:

$$F(k)=\sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-\frac{2\pi j}{N}kn} \qquad [I.77]$$

con trasformata inversa espressa da:

$$f(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F(k)e^{\frac{2\pi j}{N}kn} \qquad [I.78]$$

ove l'indice $k$ corrisponde alle frequenze $\nu=k\Delta\nu$ (essendo $\Delta\nu$ un incremento costante di frequenza o passo di campionamento nelle frequenze) e l'indice $n$ corrisponde ai tempi discreti $t_n=nT_c$.

E' interessante osservare che sono stati definiti algoritmi veloci di trasformazione di Fourier discreta (*fast Fourier transform*, FFT), come più in dettaglio descritto nel capitolo 5.

Sono state definite anche molte altre trasformate discrete (coseno e seno, di Hadamard e Walsh, di Haar, "*slant*", SVD, Karhunen-Loeve,...), per le quali sono stati messi a punto algoritmi veloci di trasformazione (vedi cap. 5).

### I.5.2 Filtri numerici

Le relazioni [I.72]-[I.76] definiscono il comportamento dei sistemi numerici e quindi anche dei filtri numerici (come è noto, per filtro si intende un sistema che trasferisce in uscita una certa banda delle frequenze di ingresso, in genere con ampiezze inalterate cioè con moltiplicazione per 1, mentre elimina tutte le altre frequenze non comprese nella banda passante): filtri passa-basso, passa-alto, passa-banda, elimina-banda...

La progettazione di questi filtri, presentata in dettaglio anche per filtri unidimensionali (1D) nel capitolo 7, comprende ormai molti algoritmi, in genere più semplici per filtri FIR e più complessi per filtri IIR (dati i problemi di stabilità e precisione). I filtri IIR hanno però il vantaggio di richiedere in genere un minor numero di dati o coefficienti per ottenere una certa funzione di trasferimento desiderata (Cappellini, Constantinides, Emiliani, 1978).

### I.5.3 Riduzione o compressione dei dati

Una classe assai importante di algoritmi di elaborazione è rappresentata dagli algoritmi o tecniche di *riduzione o compressione dei dati.* Tali algoritmi e tecniche (come descritto più in dettaglio nel cap. 8) tendono a ridurre la quantità dei campioni di un segnale al numero minimo significativo dal punto di vista informativo, in accordo con il primo teorema della teoria dell'informazione (di Shannon).

Dopo la riduzione dei dati è spesso utile applicare tecniche di codifica a controllo d'errore (rivelazione e/o correzione), in accordo con il secondo teorema di Shannon, per proteggere i dati importanti restanti dal rumore e dai disturbi (introdotti, ad esempio, dai canali di comunicazione).

L'importanza di questi algoritmi e tecniche è crescente per molti settori applicativi, a causa della grande massa di dati numerici che in essi si devono elaborare (memorizzare) o trasmettere da un terminale all'altro.

### I.5.4 Riconoscimento di configurazioni

Per molti problemi pratici, occorre definire algoritmi di riconoscimento di particolari configurazioni presenti nei segnali (tipico esempio è il riconoscimento di parole isolate o del parlato o il riconoscimento di forme di segnali nella biomedicina, quali parti di elettrocardiogrammi).

Nel capitolo 10 sono descritti i vari algoritmi definiti o in fase di sviluppo, i più semplici dei quali si basano su configurazioni note (prototipi), definite per i vari problemi di riconoscimento, con le quali sono confrontate le configurazioni presenti nei segnali con criteri di correlazione o minima "distanza" (cioè di minima differenza fra le componenti, ad esempio campioni, delle configurazioni nota e in esame).

### I.6 Cenni ai diversi settori applicativi

Fra i settori applicativi più importanti delle tecniche di elaborazione numerica dei segnali, accenniamo nel seguito ai seguenti: comunicazioni, radar, biomedicina. Un'analisi più minuziosa di queste applicazioni, per segnali numerici e soprattutto per le immagini, è riportata nei capitoli 13 e 14.

L'importanza crescente delle tecniche di elaborazione numerica per i precedenti settori applicativi è dovuta (come già indicato nel § I.1), oltre che alla definizione di algoritmi di elaborazione efficienti e veloci (vedi sopra), allo straordinario sviluppo della *tecnologia* dei dispositivi e sistemi di elaborazione: circuiti ad alta e altissima integrazione (LSI e VLSI), dispositivi speciali come quelli con accoppiamento di carica (CCD) o ad onde acustiche superficiali (SAW), convertitori analogico-numerici e numerico-analogici, calcolatori più potenti, minicalcolatori, microprocessori o microelaboratori di prestazioni sempre più elevate, sia come velocità di elaborazione sia come capacità di memoria. Lo sviluppo precedente è stato accompagnato – con l'uso sempre più esteso di tali prodotti tecnologici digitali – da costi descrescenti, competitivi con quelli di dispositivi e sistemi continui o analogici. In definitiva, a costi paragonabili, la soluzione numerica sta gradualmente sostituendo quella analogica per i vantaggi di sicurezza, precisione, adattabilità ecc., sintetizzabili in una maggiore efficienza globale.

#### I.6.1 Applicazioni nelle comunicazioni

Nei sistemi di comunicazione si è già passati a un ampio uso delle tecniche numeriche con i sistemi PCM (*pulse code modulation*, modulazione a codice di impulsi), che utilizzano i criteri del campionamento-quantizzazione-codifica binaria dei segnali informativi o messaggi (voce, dati, televisione).

In particolare, per quanto riguarda il segnale vocale sono stati sviluppati efficienti filtri numerici in trasmissione e ricezione per definire le bande di frequenza utili o estrarre il segnale dal rumore o per definire sistemi di sintesi della voce. Utilizzando tecniche di riconoscimento di configurazioni, sono stati sviluppati sistemi di riconoscimento del parlato.

Recentemente è stato sviluppato il "disco audio-numerico", sul quale il segnale musicale è inciso in forma numerica mediante un fascio laser e la lettura avviene con una testina comprendente un laser a semiconduttore e un fotorivelatore (sistema Philips: disco di 12 cm, campionamento con 44,1 kHz, parole di 16 bit).

Per la trasmissione dei dati (numeri, lettere...) sono stati definiti efficienti sistemi di elaborazione dei dati ricevuti, che correggono le distorsioni dei canali di comunicazioni e gli effetti degradanti del rumore e dei disturbi, basati su tecniche di filtraggio numerico FIR o IIR (equalizzazione fissa o adattiva).

Sono state definite tecniche di elaborazione numerica anche per i segnali televisivi

o di facsimile (trasmissione di testi scritti o di immagini fisse a distanza), che comprendono filtri numerici e soprattutto sistemi di riduzione dei dati, tenendo conto delle correlazioni in un quadro televisivo (tecniche intra-frame) o fra quadri successivi (tecniche inter-frame).

### I.6.2 Applicazioni nei sistemi radar

Il problema dell'elaborazione dei segnali radar è quello dell'estrazione dell'informazione contenuta negli "echi" in presenza di cause disturbanti che sono di origine interna o esterna al ricevitore, in particolare dovute al mezzo di propagazione (rumore di fondo o *clutter*).

Sono stati definiti per questo scopo opportuni filtri di estrazione dal rumore (filtri "adattati" alle caratteristiche del segnale noto impiegato dal radar; filtri per bersagli mobili, MTI; filtri per segnali "doppler" ecc.), sia con tecnica prettamente numerica, sia con dispositivi CCD e SAW. Sono state già impiegate anche trasformazioni veloci (FFT) per analisi in frequenza e tecniche di riconoscimento di configurazioni. Sono state sperimentate anche tecniche di filtraggio ed elaborazione di tipo adattivo, che si adattano alle diverse situazioni dei bersagli e dell'ambiente di "esplorazione" da parte del radar.

### I.6.3 Applicazioni in biomedicina

L'elaborazione numerica è iniziata prima per segnali in bassa frequenza, come i segnali elettrocardiografici (ECG) ed elettroencefalografici (EEG) per effettuare operazioni di filtraggio numerico, al fine di ridurre disturbi (ad esempio di rete d'alimentazione) o rumore, per stime spettrali o per ridurre la quantità di dati, per elaborazione locale (memorizzazione) o trasmissione a distanza.

Tale elaborazione si è estesa anche a segnali con delimitazioni più ampie dello spettro di frequenza, come i segnali fonici (fonocardiogrammi) e in particolare i *segnali ultrasonici* (da apparati a ultrasuoni), soprattutto per effettuare operazioni di filtraggio numerico (estrazione dal rumore) o analisi spettrale.

In sistemi di "monitoraggio" automatico centralizzato si tende ad acquisire i diversi segnali clinici (del tipo sopra indicato: ECG, EEG, segnali elettromiografici, pressione sanguigna, temperatura ecc.) in forma numerica per un'accurata registrazione, controllo e memorizzazione.

Di particolare interesse stanno divenendo i sistemi di trasmissione a distanza dei segnali biomedici o sistemi di "telemedicina" che usano tecniche numeriche di trasmissione ed elaborazione (filtraggio, riduzione dei dati, estrazione dei parametri ecc.), spesso utilizzando in trasmissione e ricezione microprocessori opportunamente programmati per le diverse operazioni ed elaborazioni.

## Riferimenti bibliografici

Atzeni C., Cappellini V., *Elementi di teoria delle comunicazioni* (G. & G. Editrice, Firenze 1972).
Benelli C., Cappellini V., Del Re E., *Note di comunicazioni elettriche* (G. & G. Editrice, Firenze 1976).
Biglieri E., Benedetto S., *Teoria dei segnali determinati* (Boringhieri, Torino 1977).
Cappellini V., Constantinides A. G., Emiliani P., *Digital Filters and Their Applications* (Academic Press, Londra e New York 1978).
De Castro E., *Complementi di analisi matematica* (Zanichelli, Bologna 1968).

# Capitolo 1

# Analisi ed elaborazione continua delle immagini

## 1.1 Premessa

Immagini fisse in bianco e nero, disponibili su carta, pellicola fotografica, film, *display* (o schermo elettronico) ecc., possono essere adeguatamente rappresentate in forma matematica come funzioni continue $f(x, y)$ di due variabili $x$ e $y$, coordinate spaziali che individuano i vari punti nel piano dell'immagine, essendo $f$ la luminanza o livello di grigio in tali punti.[1]

Immagini in bianco e nero variabili nel tempo, acquisite direttamente dall'ambiente esterno con cineprese, camere televisive, trasduttori ottici ecc., sono rappresentabili come funzioni continue $f(x, y, t)$ di tre variabili, $x$ e $y$ essendo le coordinate spaziali precedenti e $t$ la variabile tempo.

Immagini a colori possono poi essere scomposte in tre immagini nei colori primari o fondamentali (rosso, verde, blu), rappresentabili in forma matematica con funzioni bidimensionali (2D) o tridimensionali (3D) del tipo precedente (cap. 2).

Oggetti fissi o in movimento sono analogamente rappresentabili con funzioni del tipo $f(x, y, z)$ o $f(x, y, z, t)$, ove $z$ è la terza coordinata spaziale che con $x$ e $y$ permette di individuare un punto qualunque dello spazio. Distribuzioni di vettori (ad esempio distribuzione del campo elettrico o magnetico su una superficie) possono essere rappresentate con tre funzioni del tipo $f(x, y, z)$, relative alle tre componenti cartesiane dei vettori, nel caso di distribuzioni statiche o del tipo $f(x, y, z, t)$ per distribuzioni variabili nel tempo.

Grandezze fisiche funzioni continue di due o più variabili (esempio: tempo, spazio, velocità, temperatura, pressione, densità ecc.) o entità comunque variabili in relazione a più parametri possono infine essere rappresentate in forma matematica con funzioni multidimensionali. Nel caso in cui vi siano $n$ variabili, si avrà una funzione ($n$D) del tipo

[1] E' da osservare che immagini fisse in bianco e nero possono essere rappresentate anche con funzioni continue $f(t)$ della sola variabile tempo $t$, se le immagini stesse sono acquisite sequenzialmente (ad esempio segnale video nella *scansione* televisiva) (vedi § 2.7).

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$, che può a sua volta essere presentata in forma di immagine, considerando solo due o tre delle $x_1, x_2, ..., x_n$ effettivamente variabili e le altre costanti.

Come si vede da quanto sopra indicato, le varie forme di immagini fisse o variabili nel tempo possono essere studiate con funzioni (2D o 3D) del tipo $f(x, y)$ o $f(x, y, t)$, alle quali sarà in genere limitata la trattazione seguente.

Considerando immagini variabili nel tempo, per le corrispondenti funzioni $f(x, y, t)$ possono essere precisati opportuni limiti di estensione. Anzitutto, poiché la luminanza o livello di grigio è una quantità reale positiva, la funzione $f(x, y, t)$ è reale non negativa. Essendo poi, in pratica, ogni immagine limitata nella sua estensione spaziale e osservabile solo in un intervallo di tempo finito, si hanno le seguenti limitazioni:

$$-L_x \leqslant x \leqslant L_x \quad [1.1]$$

$$-L_y \leqslant y \leqslant L_y \quad [1.2]$$

$$-T \leqslant t \leqslant T \quad [1.3]$$

dove $L_x$, $L_y$ e $T$ sono opportune costanti. La funzione $f(x, y, t)$ è pertanto una funzione continua reale e non negativa di tre variabili indipendenti, definita in un dominio spaziale-temporale finito (Pratt, 1978).

Come nel caso dei segnali (funzioni unidimensionali, 1D; vedi Introduzione) anche per le immagini (funzioni multidimensionali, 2D, 3D) si possono sviluppare due tipi principali di analisi (presentate sinteticamente nel seguito).

*Analisi deterministica*, nella quale viene considerata una funzione univoca, che rappresenta l'immagine in ogni suo punto $(x, y)$ o istante $t$ (è il caso di immagini senza rumore).

*Analisi statistica* o *aleatoria*, nella quale le proprietà dell'immagine sono definite in modo statistico o aleatorio con un'opportuna funzione probabilità (è il caso delle immagini con rumore o disturbi).

## 1.2 Trasformata di Fourier bidimensionale e multidimensionale

La trasformata di Fourier della funzione bidimensionale (2D) $f(x, y)$ reale o complessa è definita dalla relazione (Goodman, 1968; De Castro, 1968):

$$F(\omega_x, \omega_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, e^{-j(\omega_x x + \omega_y y)} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \quad [1.4]$$

dove $\omega_x$ e $\omega_y$ sono le frequenze angolari o *pulsazioni spaziali*[2] e $j$ è l'operatore complesso ($j = \sqrt{-1}$).

[2] E' bene sottolineare subito che il termine *frequenza spaziale* $\nu_x = \omega_x/(2\pi)$ indica (in analogia alla frequenza temporale più comunemente nota di una funzione 1D $f(t)$) la rapidità di variazione della luminanza o livello di grigio in una certa direzione e si misura in numero di oscillazioni (cicli) per unità di lunghezza (date le dimensioni limitate delle immagini, si possono usare unità di lunghezza più piccole del metro, quali il centimetro o il millimetro). E' anche da osservare che spesso, per brevità, le frequenze angolari spaziali sono indicate più semplicemente come frequenze spaziali.

Simbolicamente la trasformata $F(\omega_x, \omega_y)$ può essere espressa come risultato dell'applicazione di un operatore $T_F\{\cdot\}$ alla funzione $f(x,y)$:

$$F(\omega_x, \omega_y)=T_F\{f(x,y)\}. \qquad [1.5]$$

In genere la trasformata $F(\omega_x, \omega_y)$ è una quantità complessa, che può essere scomposta nella sua parte reale $\mathrm{Re}(\omega_x, \omega_y)$ e in quella immaginaria $\mathrm{Im}(\omega_x, \omega_y)$:

$$F(\omega_x, \omega_y)=\mathrm{Re}(\omega_x, \omega_y)+j\,\mathrm{Im}(\omega_x, \omega_y) \qquad [1.6]$$

oppure nel modulo e fase:

$$F(\omega_x, \omega_y)=|F(\omega_x, \omega_y)|\,e^{-j\varphi(\omega_x, \omega_y)} \qquad [1.7]$$

dove:

$$|F(\omega_x, \omega_y)|=\sqrt{\mathrm{Re}^2(\omega_x, \omega_y)+\mathrm{Im}^2(\omega_x, \omega_y)} \qquad [1.8]$$

$$\varphi(\omega_x, \omega_y)=\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}(\omega_x, \omega_y)}{\mathrm{Re}(\omega_x, \omega_y)}. \qquad [1.9]$$

Condizione sufficiente per l'esistenza della trasformata di Fourier di $f(x, y)$ è che la funzione stessa $f(x,y)$ sia "assolutamente integrabile" (cioè che sia limitato l'integrale del suo modulo nel dominio infinito), ovvero:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<\infty. \qquad [1.10]$$

In questo caso la funzione $f(x, y)$ può essere riottenuta dalla sua trasformata di Fourier mediante la relazione inversa:

$$f(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty} F(\omega_x, \omega_y)\,e^{j(\omega_x x+\omega_y y)}\,\mathrm{d}\omega_x\,\mathrm{d}\omega_y \qquad [1.11]$$

oppure, in forma di operatore inverso:

$$f(x,y)=T_F^{-1}\{F(\omega_x, \omega_y)\}. \qquad [1.12]$$

Le funzioni $f(x, y)$ e $F(\omega_x, \omega_y)$ sono chiamate *coppie di trasformate di Fourier*. Inoltre la [1.11] ci dice che la funzione $f(x, y)$ è esprimibile come somma doppia di un numero infinito di oscillazioni sinusoidali elementari la cui ampiezza, infinitesima, vale:

$$\frac{1}{4\pi^2}F(\omega_x, \omega_y)\,\mathrm{d}\omega_x\,\mathrm{d}\omega_y. \qquad [1.13]$$

La [1.13] viene detta componente armonica di $f(x,y)$; la $F(\omega_x, \omega_y)$, che esprime la distribuzione delle componenti armoniche della funzione $f(x,y)$ sugli assi delle frequenze spaziali, è anche detta spettro di $f(x,y)$.

La trasformata di Fourier 2D può anche essere ottenuta in due passi, integrando prima nella variabile $x$ poi nella variabile $y$:

$$F_x(\omega_x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, e^{-j\omega_x x}\, \mathrm{d}x \qquad [1.14]$$

$$F(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_x(\omega_x, y)\, e^{-j\omega_y y}\, \mathrm{d}y. \qquad [1.15]$$

Per una funzione multidimensionale $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, che soddisfi a opportune condizioni di regolarità (in particolare che sia "assolutamente integrabile"), si può analogamente definire la trasformata di Fourier a $n$ dimensioni ($n$D) (De Castro, 1968):

$$F(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) = \\ = \iint_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n)\, e^{-j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \cdots + \omega_n x_n)}\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n \qquad [1.16]$$

e la trasformata inversa

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)\, e^{j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \cdots + \omega_n x_n)}\, \mathrm{d}\omega_1\, \mathrm{d}\omega_2 \ldots \mathrm{d}\omega_n \qquad [1.17]$$

dove $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ sono le frequenze angolari o pulsazioni spaziali e $\nu_1 = \omega_1/(2\pi)$, $\nu_2 = \omega_2/(2\pi), ..., \nu_n = \omega_n/(2\pi)$ sono le frequenze spaziali.[3]

## 1.3 Proprietà della trasformata di Fourier bidimensionale

Sono di seguito elencate le principali proprietà della trasformata di Fourier bidimensionale.

*Linearità*

L'operatore $T_F$, che associa alla funzione $f(x, y)$ la sua trasformata di Fourier, è lineare; si ha cioè la proprietà:

$$T_F\{af_1(x, y) + bf_2(x, y)\} = aT_F\{f_1(x, y)\} + bT_F\{f_2(x, y)\} \qquad [1.18]$$

per cui lo spettro di un'immagine che sia combinazione lineare di due o più immagini risulta combinazione lineare dei singoli spettri.

[3] Per immagini rappresentate da funzioni 2D o $n$D periodiche, si può anche definire la serie di Fourier bidimensionale o multidimensionale (De Castro, 1968).

*Separabilità*

Se la funzione $f(x, y)$ è separabile nel dominio spaziale, cioè:

$$f(x,y) = f_x(x) f_y(y), \qquad [1.19]$$

è separabile anche la sua trasformata di Fourier 2D:

$$F(\omega_x, \omega_y) = F_x(\omega_x) F_y(\omega_y), \qquad [1.20]$$

essendo $F_x(\omega_x)$ e $F_y(\omega_y)$ le trasformate di Fourier 1D rispettivamente di $f_x(x)$ e $f_y(y)$.

*Trasformata di funzione complessa coniugata*

La trasformata di Fourier della funzione $f^*(x, y)$, complessa coniugata di $f(x, y)$, risulta:

$$T_F\{f^*(x,y)\} = F^*(-\omega_x, -\omega_y) \qquad [1.21]$$

essendo $F^*(\omega_x, \omega_y)$ la forma complessa coniugata della trasformata $F(\omega_x, \omega_y)$.

*Trasformata di funzione reale*

Per ogni funzione $f(x, y)$ reale è immediato verificare che:

$$F(-\omega_x, -\omega_y) = F^*(\omega_x, \omega_y) \qquad [1.22]$$

ovvero che la trasformata di Fourier per $\omega_x < 0$ e $\omega_y < 0$ è la forma complessa coniugata della trasformata per $\omega_x > 0$ e $\omega_y > 0$. Pertanto una funzione $f(x, y)$ reale ha trasformata di Fourier con modulo simmetrico e fase antisimmetrica rispetto ai due assi delle frequenze angolari spaziali $\omega_x$ e $\omega_y$.

Più in particolare, se $f(x, y)$ è simmetrica, la [1.22] diviene:

$$F(-\omega_x, -\omega_y) = F(\omega_x, \omega_y) \qquad [1.23]$$

*Variazione di scala*

Una variazione di scala lineare delle variabili spaziali dà luogo a una variazione inversa delle frequenze angolari spaziali, cioè (con $a$ e $b$ costanti):

$$T_F\{f(ax, by)\} = \frac{1}{ab} F\left(\frac{\omega_x}{a}, \frac{\omega_y}{b}\right). \qquad [1.24]$$

Pertanto, come è noto per funzioni 1D, l'espansione lungo un asse in un dominio dà luogo alla contrazione lungo il corrispondente asse nell'altro dominio, unitamente a una variazione di ampiezza.

*Traslazione o variazione di posizione*

Una traslazione o variazione di posizione nella funzione $f(x, y)$ (immagine) dà

luogo a una variazione di fase della trasformata, cioè:

$$T_F\{f(x-a, y-b)\} = F(\omega_x, \omega_y)\, e^{-j(\omega_x a + \omega_y b)} \qquad [1.25]$$

essendo $a$ e $b$ costanti. Analogamente per una variazione di frequenza si ha:

$$T_F^{-1}\{F(\omega_x - a, \omega_y - b)\} = f(x, y)\, e^{j(ax + by)}. \qquad [1.26]$$

*Convoluzione*

Assumiamo che una funzione $g(x, y)$ sia ottenuta come convoluzione, o *prodotto* integrale, di due funzioni $f(x, y)$ e $h(x, y)$; poniamo cioè:

$$g(x,y) = f(x,y) \circledast h(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta)\, h(x-\alpha, y-\beta)\, \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta =$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} h(\alpha, \beta)\, f(x-\alpha, y-\beta)\, \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta \qquad [1.27]$$

dove il simbolo $\circledast$ denota appunto l'operazione di convoluzione.

Non è difficile verificare che la trasformata di Fourier della $g(x, y)$ risulta uguale al prodotto delle trasformate di $f(x, y)$ e $h(x, y)$, cioè:

$$G(\omega_x, \omega_y) = H(\omega_x, \omega_y)\, F(\omega_x, \omega_y), \qquad [1.28]$$

avendo indicato con $G(\omega_x, \omega_y)$ la trasformata di $g(x, y)$ e con $H(\omega_x, \omega_y)$ la trasformata di $h(x, y)$.

*Teorema di Parseval*

Consideriamo un'immagine, rappresentata dalla funzione $f(x, y)$, avente energia finita. Per definizione la sua energia è espressa da:

$$E_n\{f(x, y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, f^*(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \qquad [1.29]$$

Si può provare che tale energia è esprimibile in funzione della trasformata di Fourier di $f(x, y)$. Più esattamente si ha (uguaglianza di Parseval):

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} |F(\omega_x, \omega_y)|^2\, \mathrm{d}\omega_x\, \mathrm{d}\omega_y. \qquad [1.30]$$

Considerando un'altra immagine, rappresentata dalla funzione $g(x, y)$, è anche possibile provare l'uguaglianza generalizzata di Parseval:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, g^*(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} F(\omega_x, \omega_y)\, G^*(\omega_x, \omega_y)\, \mathrm{d}\omega_x\, \mathrm{d}\omega_y. \qquad [1.31]$$

*Autocorrelazione*

Data la funzione $f(x, y)$, la sua funzione di autocorrelazione viene definita dal seguente integrale:

$$C(\alpha, \beta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, f^*(x + \alpha, y + \beta)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \qquad [1.32]$$

Si può provare che la trasformata di Fourier della $C(\alpha, \beta)$ è uguale al modulo quadrato della trasformata di $f(x, y)$, cioè:

$$T_F\{C(\alpha, \beta)\} = |F(\omega_x, \omega_y)|^2. \qquad [1.33]$$

*Derivata*

Le derivate spaziali, secondo $x$ e $y$, della funzione $f(x, y)$ hanno trasformata di Fourier espressa dalle seguenti relazioni:

$$T_F\left\{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right\} = j\,\omega_x F(\omega_x, \omega_y) \qquad [1.34]$$

$$T_F\left\{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right\} = j\,\omega_y F(\omega_x, \omega_y). \qquad [1.35]$$

## 1.4 Sistemi lineari bidimensionali

Un sistema bidimensionale (2D) è, nella sua forma più generale, definito da un operatore $T\{\cdot\}$, che fa corrispondere a una funzione (immagine) d'ingresso $f(x, y)$ una funzione (immagine) di uscita $g(x, y)$ (Papoulis, 1968); cioè:

$$g(x, y) = T\{f(x, y)\}. \qquad [1.36]$$

Sono noti operatori speciali 2D, in genere estensione di operatori 1D. Un operatore speciale di notevole interesse è rappresentato dall'operatore "delta di Dirac" $\delta(x, y)$, che ha le seguenti proprietà di definizione

$$\delta(x, y) = \begin{cases} \infty & \text{per} \quad x = 0,\ y = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad [1.37]$$

$$\iint_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 1 \quad \text{per} \quad \epsilon > 0 \qquad [1.38]$$

essendo $\epsilon$ un numero comunque piccolo.

L'operatore delta di Dirac 2D può essere decomposto nel prodotto di due operatori delta 1D, definiti lungo coordinate ortonormali, cioè:

$$\delta(x, y) = \delta(x)\, \delta(y). \qquad [1.39]$$

L'operatore $\delta(x, y)$ può inoltre essere ottenuto come limite di diverse funzioni. In particolare si può ottenere come limite della funzione rettangolare (rect):

$$\delta(x,y) = \lim_{\alpha\to\infty} [\alpha^2 \operatorname{rect}\{\alpha x\} \operatorname{rect}\{\alpha y\}] \qquad [1.40]$$

essendo:

$$\operatorname{rect}\{x\} = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{per} \quad |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\operatorname{rect}\{y\} = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad |y| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{per} \quad |y| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

e della funzione sinc:

$$\delta(x,y) = \lim_{\alpha\to\infty} [\alpha^2 \operatorname{sinc}\{\alpha x\} \operatorname{sinc}\{\alpha y\}] \qquad [1.41]$$

essendo:

$$\operatorname{sinc}\{\alpha x\} = \frac{\sin(\pi\alpha x)}{\pi\alpha x}$$

$$\operatorname{sinc}\{\alpha y\} = \frac{\sin(\pi\alpha y)}{\pi\alpha y}$$

Un sistema 2D è detto sistema lineare additivo se per esso vale la legge di sovrapposizione degli effetti, cioè:

$$T\{a_1 f_1(x,y) + a_2 f_2(x,y) + \cdots + a_n f_n(x,y)\} = a_1 T\{f_1(x,y)\} + a_2 T\{f_2(x,y)\} + + \cdots + a_n T\{f_n(x,y)\} \qquad [1.42]$$

dove $a_1, a_2, ..., a_n$ sono costanti reali o complesse.

Tornando a considerare l'operatore delta di Dirac, esso permette di estrarre determinati valori dalla funzione $f(x, y)$; si ha infatti:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\delta(x-a, y-b)\,dx\,dy = f(a,b) \qquad [1.43]$$

essendo $a$ e $b$ costanti. In particolare risulta:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\delta(x,y)\,dx\,dy = f(0,0). \qquad [1.44]$$

Utilizzando la relazione [1.43], esprimiamo la funzione $f(x, y)$, in ingresso a un

sistema 2D, tenendo conto che $\delta(-x,-y)=\delta(x,y)$ (Papoulis, 1968):

$$f(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)\,\delta(\alpha-x,\beta-y)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta=\iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)\,\delta(x-\alpha,y-\beta)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta. \quad [1.45]$$

Se l'uscita $g(x,y)$ del sistema è definita dalla [1.36] si avrà:

$$g(x,y)=T\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)\,\delta(x-\alpha,y-\beta)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\right\} \quad [1.46]$$

ovvero, rovesciando l'ordine di applicazione dell'operatore $T$ e dell'integrale:

$$g(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)\,T\{\delta(x-\alpha,y-\beta)\}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta. \quad [1.47]$$

Il secondo termine della funzione integranda, definito da:

$$h(x,y;\alpha,\beta)=T\{\delta(x-\alpha,y-\beta)\} \quad [1.48]$$

è chiamato (in analogia ai sistemi 1D) "risposta impulsiva" del sistema 2D. Nei sistemi 2D ottici la risposta impulsiva è spesso chiamata con il termine inglese "*point spread function*" (PSF) (Pratt, 1978).

Sostituendo la [1.48] nella [1.47], si ha:

$$g(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)\,h(x,y;\alpha,\beta)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta. \quad [1.49]$$

Un sistema 2D lineare additivo è detto spazialmente invariante, se la sua risposta impulsiva dipende solo dai valori $x-\alpha$, $y-\beta$. In un sistema ottico ciò implica che, variando la posizione di una sorgente puntiforme nel piano di ingresso, la sua immagine nel piano di uscita cambia di posizione ma non di forma.

Per un sistema spazialmente invariante si ha:

$$h(x,y;\alpha,\beta)=h(x-\alpha,y-\beta) \quad [1.50]$$

e l'integrale [1.49] si riduce al caso ben noto e importante dell'integrale di convoluzione (già considerato: vedi [1.27]).

Per la proprietà di convoluzione (relazione [1.28]) della trasformata di Fourier, la trasformata della funzione di uscita da un sistema 2D lineare additivo si può ottenere moltiplicando la trasformata della funzione di ingresso per la trasformata $H(\omega_x,\omega_y)$ della risposta impulsiva. Analogamente, conoscendo le trasformate delle funzioni di ingresso e uscita, si può ottenere la $H(\omega_x,\omega_y)$ (fig. 1.1):

$$H(\omega_x,\omega_y)=\frac{G(\omega_x,\omega_y)}{F(\omega_x,\omega_y)} \quad [1.51]$$

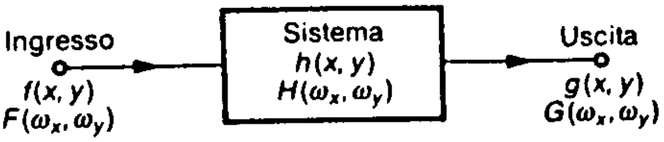



**Figura 1.1**
Sistema 2D lineare additivo, spazialmente invariante, definito dalla risposta impulsiva $h(x, y)$ con le immagini di ingresso e uscita (funzioni $f(x, y)$ e $g(x, y)$).

che viene anche chiamata la risposta nelle frequenze spaziali del sistema 2D considerato. Tale sistema pertanto è perfettamente individuato, quando si conosca la sua risposta impulsiva $h(x, y)$ (che ne specifica il comportamento spaziale) o la sua risposta in frequenza (o funzione di trasferimento) $H(\omega_x, \omega_y)$ (che ne specifica il comportamento frequenziale). In particolare, conoscendo la $H(\omega_x, \omega_y)$, si ha un'altra relazione (oltre alla [1.27]) che permette di ottenere l'uscita $g(x, y)$:

$$g(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty} H(\omega_x, \omega_y)F(\omega_x, \omega_y)e^{j(\omega_x x+\omega_y y)}\mathrm{d}\omega_x\,\mathrm{d}\omega_y. \qquad [1.52]$$

Le relazioni precedenti (in particolare le [1.27], [1.51], [1.52]) costituiscono la base fondamentale dello studio dei sistemi 2D lineari additivi.

Una classe di sistemi 2D lineari additivi di particolare interesse è rappresentata dai sistemi non distorcenti. In analogia ai sistemi 1D, un sistema 2D è detto non distorcente, se da una funzione (immagine) $f(x, y)$ di ingresso fornisce una funzione (immagine) $g(x,y)$ di uscita del tipo:

$$g(x,y)=Af(x-x_0,y-y_0) \qquad [1.53]$$

dove $A$, $x_0$ e $y_0$ sono opportune costanti, cioè se i valori della funzione di ingresso sono stati semplicemente spostati con traslazioni costanti secondo $x$ e $y$ e moltiplicati per un fattore pure costante. Non è difficile provare che per un tale sistema la risposta in frequenza o funzione di trasferimento $H(\omega_x, \omega_y)$ obbedisce alle seguenti condizioni di non distorsione:

$$|H(\omega_x, \omega_y)|=A \qquad [1.54]$$

$$\psi(\omega_x, \omega_y)=\omega_x x_0+\omega_y y_0 \qquad [1.55]$$

cioè ha il modulo $|H(\omega_x, \omega_y)|$ costante e uguale ad $A$ e la fase $\psi(\omega_x, \omega_y)$ lineare.

## 1.5 Analisi statistica delle immagini

Immagini con rumore o disturbi di vario tipo non sono rappresentabili in modo univoco da funzioni determinate $f(x, y)$ o $f(x, y, t)$ considerate nei precedenti para-

grafi. Non è pertanto sufficiente l'analisi deterministica svolta, ma occorre sviluppare un'analisi di tipo statistico (Pratt, 1978).

Riferendoci a immagini variabili nel tempo, le funzioni $f(x, y, t)$ corrispondenti vengono considerate facenti parte di un processo aleatorio o stocastico continuo tridimensionale (3D) nelle variabili spaziali $(x, y)$ e temporale $t$. Tale processo aleatorio può quindi essere definito facendo ricorso alla sua densità di probabilità congiunta $p\{f_1, f_2, ..., f_m; x_1, y_1, t_1, x_2, y_2, t_2, ..., x_m, y_m, t_m\}$ per tutti i campioni spaziali e temporali $(x_i, y_i, t_i)$, $i = 1, 2, ..., m$.

In genere densità di probabilità congiunta di elevato ordine non sono note per le immagini. La densità di probabilità del primo ordine $p(f; x, y, t)$ può invece essere approssimata attraverso la conoscenza del processo fisico in esame (con adeguati modelli) o con misure sperimentali sulle immagini.[4]

Un processo aleatorio di particolare interesse (come approssimazione di diversi tipi di rumore fisico) è rappresentato dal processo gaussiano, per il quale la densità di probabilità del primo ordine risulta espressa da (Pratt, 1978):

$$p\{f; x, y, t\} = [2\pi\sigma_f^2(x, y, t)]^{-1/2} e^{-\frac{[f(x,y,t) - \eta_f(x,y,t)]^2}{2\sigma_f^2(x,y,t)}} \qquad [1.56]$$

dove i parametri $\eta_f(x, y, t)$ e $\sigma_f^2(x, y, t)$ indicano la media e la varianza del processo.

Anche la densità di probabilità condizionale di un processo aleatorio che rappresenta una immagine con rumore è utile per caratterizzare il processo stesso. Ad esempio, per la densità di probabilità condizionale valutata per i valori $(x_1, y_1, t_1)$, ammessa la conoscenza di $f(x_2, y_2, t_2)$ si ha la relazione:

$$p\{f_1; x_1, y_1, t_1 / f_2; x_2, y_2, t_2\} = \frac{p\{f_1, f_2; x_1, y_1, t_1, x_2, y_2, t_2\}}{p\{f_2; x_2, y_2, t_2\}} \qquad [1.57]$$

Per descrivere un processo aleatorio o stocastico sono inoltre utili i suoi valori medi. Anzitutto si può definire il valore medio temporale o media temporale, per un punto $(x, y)$, espressa da:

$$\langle f(x, y, t)_T \rangle = \lim_{T \to \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x, y, t) w(t) \, dt \right\} \qquad [1.58]$$

ove $w(t)$ è un'opportuna funzione "peso" (nel caso più semplice ammessa uguale ad 1). Analogamente la media spaziale (valore medio della luminanza o livello di grigio nel piano $x, y$ a un certo istante $t$) è espressa da:

$$\langle f(x, y, t)_S \rangle = \lim_{\substack{L_x \to \infty \\ L_y \to \infty}} \left\{ \frac{1}{4 L_x L_y} \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-L_y}^{L_y} f(x, y, t) \, dx \, dy \right\}. \qquad [1.59]$$

[4] Le funzioni probabilità possono essere misurate in forma approssimata attraverso le cosiddette "frequenze statistiche" (numero di volte che un determinato livello di grigio si presenta in un certo intervallo o zona spaziale di osservazione).

Ai valori medi precedenti, usati anche nel caso deterministico, si aggiungono i valori medi statistici, tipici dei processi aleatori. La media statistica o media d'insieme o momento del primo ordine è definita da:[5]

$$\eta_f(x,y,t)=E\{f(x,y,t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,t)p\{f;x,y,t\}\mathrm{d}f \qquad [1.60]$$

mentre il momento del secondo ordine o funzione di autocorrelazione statistica ha la seguente espressione:

$$\begin{aligned}C_s(x_1,y_1,t_1;x_2,y_2,t_2)&=E\{f(x_1,y_1,t_1)f^*(x_2,y_2,t_2)\}=\\&=\iint_{-\infty}^{\infty} f(x_1,y_1,t_1)f^*(x_2,y_2,t_2)p\{f_1,f_2;x_1,y_1,t_1,x_2,y_2,t_2\}\mathrm{d}f_1\mathrm{d}f_2.\end{aligned} \qquad [1.61]$$

Se il processo aleatorio soddisfa a opportune condizioni di stazionarietà, la sua funzione di autocorrelazione dipende dalle differenze delle variabili, $x_1-x_2, y_1-y_2, t_1-t_2$ e non dai loro valori individuali (cioè la funzione di autocorrelazione non dipende dalla posizione $(x,y)$ o dal tempo $t$). In questo caso si ha:

$$C_s(x_1,y_1,t_1;x_2,y_2,t_2)=C_s(x_1-x_2;y_1-y_2;t_1-t_2) \qquad [1.62]$$

oppure:

$$C_s(\tau_x,\tau_y,\tau_t)=E\{f(x+\tau_x,y+\tau_y,t+\tau_t)f^*(x,y,t)\} \qquad [1.63]$$

che, per $f(x,y,t)$ reale, risulta reale e pari rispetto a $\tau_x, \tau_y, \tau_t$.

Può essere provata un'importante relazione che collega la funzione di autocorrelazione $C_s(\tau_x, \tau_y, \tau_t)$ alla densità spettrale di potenza $P_f(\omega_x, \omega_y, \omega_t)$ (legata alla $|F(\omega_x, \omega_y, \omega_t)|^2$; vedi anche [1.33] e § 1.2.1):

$$P_f(\omega_x,\omega_y,\omega_t)=\iiint_{-\infty}^{\infty} C_s(\tau_x,\tau_y,\tau_t)e^{-j(\omega_x\tau_x+\omega_y\tau_y+\omega_t\tau_t)}\mathrm{d}\tau_x\mathrm{d}\tau_y\mathrm{d}\tau_t \qquad [1.64]$$

cioè la densità spettrale di potenza è la trasformata di Fourier tridimensionale (3D) della funzione di autocorrelazione.

In molti processi aleatori relativi a immagini sperimentali, si può effettuare una separazione spazio-tempo, in modo tale che risulta:

$$C_s(\tau_x,\tau_y,\tau_t)=C_{xy}(\tau_x,\tau_y)C_t(\tau_t) \qquad [1.65]$$

e ancora si può ulteriormente separare il dominio spaziale secondo $x$ e $y$, cioè:

$$C_{xy}(\tau_x,\tau_y)=C_x(\tau_x)C_y(\tau_y). \qquad [1.66]$$

[5] Se media statistica e media temporale-spaziale sono uguali, il processo è detto ergodico.

In altri processi aleatori (specialmente relativi a immagini riprese da "scene naturali") la funzione di autocorrelazione non è separabile spazialmente, risultando in genere con simmetria rotazionale, non essendovi alcuna direzione preferenziale.

Una volta definito il comportamento statistico delle immagini con rumore, con le diverse funzioni e relazioni sopra indicate, è importante poter valutare i legami che possono intercorrere fra processi aleatori in ingresso e in uscita da sistemi di elaborazione delle immagini stesse.

Nel caso di sistemi lineari additivi spazialmente invarianti, si può provare che, se il processo di ingresso è stazionario, stazionario è anche il processo di uscita con le stesse caratteristiche.

Consideriamo in particolare un sistema tridimensionale (3D) lineare additivo spazialmente invariante, definito dalla sua funzione impulsiva $h(x, y, t)$. Se $f(x, y, t)$ è la funzione di ingresso, la funzione di uscita $g(x, y, t)$ si può ancora ottenere con l'integrale di convoluzione, cioè:

$$g(x,y,t)=\iiint_{-\infty}^{\infty} h(\alpha,\beta,\gamma)f(x-\alpha,y-\beta,t-\gamma)\,d\alpha d\beta d\gamma. \qquad [1.67]$$

Nel caso che in ingresso al sistema, definito dalla $h(x, y, t)$, si abbia un processo aleatorio che soddisfi a opportune condizioni di stazionarietà, si può provare che la densità spettrale di potenza in uscita $P_g(\omega_x, \omega_y, \omega_t)$ è ottenibile in funzione della densità spettrale di potenza in ingresso $P_f(\omega_x, \omega_y, \omega_t)$ mediante la seguente relazione:

$$P_g(\omega_x, \omega_y, \omega_t)=P_f(\omega_x,\omega_y,\omega_t)\,|H(\omega_x, \omega_y, \omega_t)|^2; \qquad [1.68]$$

questa è molto importante nello studio dei sistemi che elaborano immagini con rumore.

## 1.6 Modelli strutturali di rappresentazione delle immagini con rumore

Nella analisi ed elaborazione delle immagini con rumore sono utili modelli strutturali più o meno complessi, nei quali viene schematizzato il processo con cui l'immagine senza rumore (non nota, ma "desiderata") risulta alterata da rumore e disturbi di vario tipo.

Considerando immagini variabili nel tempo (variabili $x, y, t$), un modello strutturale assai generale è definito dalla seguente relazione:

$$f_r(x,y,t)=f(x,y,t)n_m(x,y,t)+n_a(x,y,t) \qquad [1.69]$$

dove $f(x, y, t)$ rappresenta l'immagine senza rumore, $f_r(x, y, t)$ l'immagine alterata dal rumore moltiplicativo $n_m(x, y, t)$ e dal rumore additivo $n_a(x, y, t)$ (fig. 1.2).

Dal modello precedente derivano due modelli semplificati, nei quali restano presenti le singole componenti di rumore moltiplicativo o additivo.

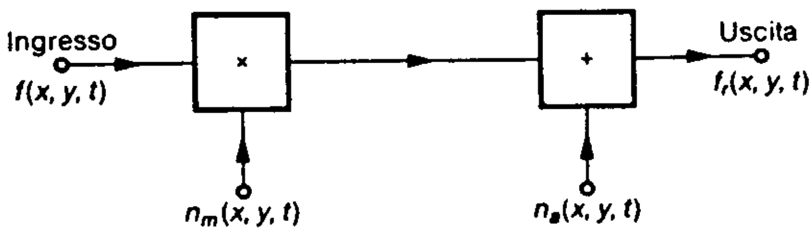



**Figura 1.2**
Modello strutturale di rappresentazione di immagine con rumore moltiplicativo $n_m(x, y, t)$ e additivo $n_a(x, y, t)$.

Confrontando i due tipi di rumore, è evidente che il rumore additivo corrisponde a un modello più semplice rispetto al rumore moltiplicativo, in quanto risulta relativamente più agevole l'estrazione dell'immagine originaria desiderata dal rumore additivo che da quello moltiplicativo.

Un modello significativo per diversi problemi pratici di elaborazione di immagini con rumore è definito dalla relazione seguente:

$$f_r(x,y,t)=f(x,y,t)\circledast h(x,y,t)+n_a(x,y,t) \qquad [1.70]$$

dove $h(x,y,t)$ è la risposta impulsiva di un sistema lineare (in genere non conosciuta) e gli altri termini sono come nella [1.69] (fig. 1.3). In sostanza l'immagine desiderata appare prima trasferita dal sistema lineare $S_i$ incognito e poi alterata dal rumore additivo. L'estrazione dal rumore implica pertanto una "deconvoluzione" non facile (non essendo nota $h(x, y, t)$) con separazione dal rumore additivo non noto. E' chiaro che se invece il sistema $S_i$ è noto, o si conoscono approssimazioni valide della $h(x,y,t)$, il problema si semplifica notevolmente.

E' interessante osservare che i legami matematici nei due modelli relativi alla [1.69] e [1.70] si invertono fra loro (prodotto con convoluzione) quando si passa alle trasformate, risultando:

$$F_r(\omega_x, \omega_y, \omega_t)=F(\omega_x, \omega_y, \omega_t)\circledast N_m(\omega_x, \omega_y, \omega_t)+N_a(\omega_x, \omega_y, \omega_t) \qquad [1.71]$$

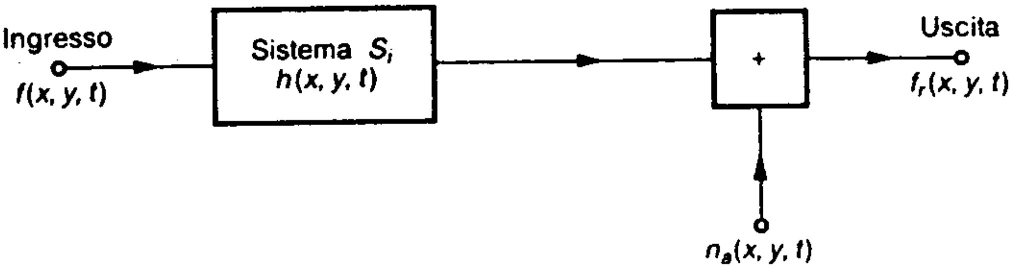



**Figura 1.3**
Modello strutturale di rappresentazione di immagine con rumore $n_a(x, y, t)$ aggiunto all'uscita da un sistema lineare incognito $S_i$.

per il primo modello [1.69], con $F_r, F, N_m$ e $N_a$ trasformate delle rispettive funzioni $f_r, f, n_m$ e $n_a$, e la seguente espressione per il secondo modello [1.70]:

$$F_r(\omega_x, \omega_y, \omega_t) = F(\omega_x, \omega_y, \omega_t) H(\omega_x, \omega_y, \omega_t) + N_a(\omega_x, \omega_y, \omega_t) \qquad [1.72]$$

essendo $H(\omega_x, \omega_y, \omega_t)$ la funzione di trasferimento del sistema lineare avente risposta impulsiva $h(x, y, t)$.

I modelli precedenti valgono ovviamente anche per immagini fisse, rappresentate da funzioni 2D del tipo $f(x, y)$, per le quali si possono ripetere le considerazioni precedenti.

In sintesi il problema fondamentale della elaborazione delle immagini con rumore, rappresentate da modelli strutturali più o meno complessi del tipo sopra indicato, implica la definizione ed applicazione di opportuni operatori, filtri di estrazione dal rumore, definiti nel dominio spaziale-temporale o nel dominio frequenziale (vedi cap. 9).

## Riferimenti bibliografici

De Castro E., *Complementi di analisi matematica* (Zanichelli, Bologna 1968).
Goodman J. W., *Introduction to Fourier Optics* (McGraw-Hill, New York 1968).
Papoulis A., *Systems and Transforms with Applications in Optics* (McGraw-Hill, New York 1968).
Pratt W. K., *Digital Image Processing* (Wiley, New York 1978).

# Capitolo 2

# Proprietà della visione e acquisizione delle immagini

## 2.1 Premessa

Per studiare adeguatamente i metodi di elaborazione delle immagini, è utile analizzare, alla luce delle attuali conoscenze, i delicati processi della visione e percezione da parte dell'uomo. Ciò può permettere sia di definire idonei modelli della visione, che sono necessari per il progetto dei sistemi di acquisizione ed elaborazione delle immagini, sia di stabilire efficaci misure della intelligibilità delle immagini e della relativa fedeltà di rappresentazione.

Di seguito sono pertanto descritti sinteticamente i processi della visione e percezione e i modelli sviluppati per rappresentare tali processi. Sono quindi presentate le diverse tecniche di acquisizione e registrazione (o conservazione) delle immagini in bianco e nero e a colori mediante sistemi ottici e optoelettronici (macchine fotografiche, telecamere, sensori multispettrali, radiometri, radar ecc.).

## 2.2 Struttura dell'occhio umano

La figura 2.1 mostra una sezione orizzontale trasversale di un occhio umano con le sue parti principali. L'occhio è di forma pressoché sferica, con un diametro medio di circa 20 mm. Esso è circondato da diverse membrane: la cornea, tessuto trasparente che copre la parte anteriore dell'occhio; la sclera, membrana opaca che, partendo dalla cornea, raccoglie la restante parte dell'occhio; la coroide, membrana posta direttamente sotto la sclera, contenente i vasi sanguigni che portano la maggior parte del nutrimento all'occhio. La coroide ha opportuni pigmenti adatti a ridurre la quantità di luce estranea entrante nell'occhio e gli effetti di riflessione dentro il globo ottico. Nella sua parte anteriore la coroide termina nell'iride, che agisce da diaframma (contraendosi o espandendosi) in modo da controllare la quantità di luce che effettivamente entra nell'occhio nella banda spettrale visibile (da 380 a 780 nm). L'apertura

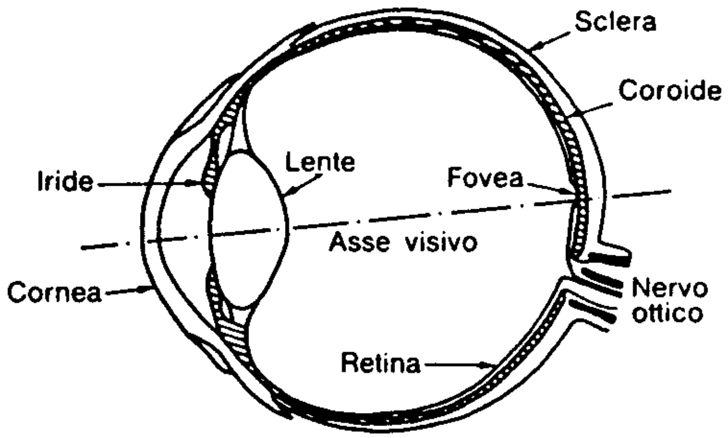



**Figura 2.1**
Struttura schematica della sezione orizzontale trasversale di un occhio umano con le sue parti principali.

centrale dell'iride (la pupilla) varia in diametro, indicativamente, da 2 mm a 8 mm (Pratt, 1978).

La membrana più interna dell'occhio è la retina, sulla quale si forma l'immagine degli oggetti osservati dall'occhio. L'acquisizione di tale immagine (visione) è ottenuta mediante numerosi recettori ottici distribuiti sulla superficie della retina. Sono noti due tipi di recettori: i coni e i bastoncelli. Il numero dei coni contenuti in ciascun occhio varia da 6 a 7 milioni. Essi sono principalmente distribuiti nella parte centrale della retina, detta fovea, e sono altamente sensibili al colore, rispondendo a livelli elevati di illuminazione. Si hanno tre tipi di coni ($\alpha, \beta, \gamma$) con diverse risposte spettrali (fig. 2.2). La visione mediante i coni è chiamata fotopica. Il numero dei bastoncelli (recettori elementari di forma più allungata dei coni) è assai grande, variando da 75 a 150 milioni per ciascun occhio. Essi sono distribuiti su un'area più grande di quella occupata dai coni. Un'altra differenza dai coni consiste nel fatto che, mentre questi sono singolarmente collegati ciascuno a una propria terminazione nervosa, i bastoncelli sono connessi a gruppi a un singolo nervo. Per i due motivi precedenti i coni possono risolvere anche piccoli dettagli, mentre i bastoncelli forniscono una visione globale generale della scena osservata. I bastoncelli non intervengono, inoltre, nel processo di acquisizione dei colori e sono sensibili a livelli bassi di illuminazione (ad esempio oggetti che appaiono fortemente colorati di giorno, sembrano forme senza colore di notte al chiar di luna, in quanto sono stimolati soltanto i bastoncelli). La visione mediante i bastoncelli è chiamata scotopica (Gonzalez e Wintz, 1977).

La lente (o cristallino), nella parte centrale anteriore dell'occhio, è formata da strati concentrici di cellule fibrose. Contiene dal 60 al 70 per cento di acqua e una quantità di proteine maggiore di quella presente in ogni altro tessuto dell'occhio. Essa

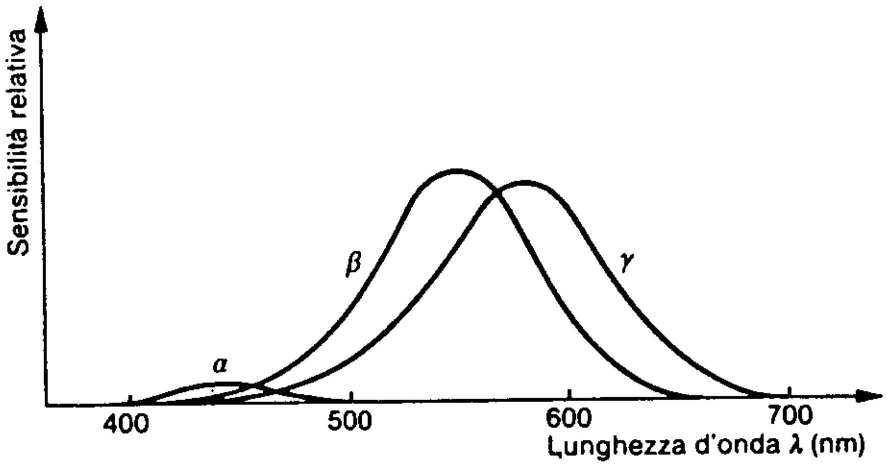



**Figura 2.2**
Risposte spettrali (sensibilità relativa in funzione della lunghezza d'onda λ) dei tre tipi di coni: α (con picco di sensibilità sul blu), β (con picco sul verde) e γ (con picco sul giallo-rosso).

assorbe una parte della luce nel visibile (circa 8%), con assorbimento maggiore a brevi lunghezze d'onda, e gran parte della radiazione nell'infrarosso e nell'ultravioletto. Caratteristica peculiare di questa particolare lente, rispetto a quelle usuali di ottica, è la sua flessibilità, che le permette di adattarsi nella forma geometrica per mettere a fuoco oggetti a diversa distanza dall'occhio, creando un'immagine nitida (rovesciata) sulla retina (in particolare nell'area della fovea).

La luce, giungendo ai coni e ai bastoncelli della retina (attraverso l'azione di focheggiamento della lente), provoca la scissione di alcune proteine complesse, dette fotopsine. Fra queste la più nota è la rodopsina dei bastoncelli, mentre nei coni le sostanze sono almeno tre. La scissione provocata dalla luce dà luogo alla liberazione di energia, che si trasforma in messaggi verso le fibre del nervo ottico, che li trasferisce direttamente al cervello (Luccio, 1981). E' interessante osservare che le fibre del nervo ottico sono circa 1 milione; si deduce pertanto, tenendo conto del numero di coni e bastoncelli sopra indicato, che dalla retina al nervo ottico si ha una prima elaborazione e integrazione delle informazioni visive, con una loro concentrazione di un fattore circa pari a 100.

Il nervo ottico trasporta le informazioni visive ai due emisferi cerebrali. La parte nasale della retina invia i messaggi alla parte mediale del nervo ottico, che, incrociandosi a livello del chiasma, li trasferisce all'emisfero controlaterale. La parte temporale della retina invia invece le sue informazioni all'emisfero omolaterale. Le informazioni visive giungono, attraverso una stazione sinaptica a livello del nucleo genicolato laterale (importante per la percezione del colore), a specifiche aree cerebrali poste nella corteccia occipitale, in particolare intorno alla scissura calcarina (Eden, 1977). E' infine importante osservare che l'uso combinato delle informazioni provenienti dalle retine dei due occhi permette di misurare la distanza fra l'osservatore e gli oggetti della scena esterna (percezione tridimensionale) (Pierantoni, 1981).

## 2.3 Colori e loro percezione

Nel 1666 Isaac Newton scoprì che un fascio di luce solare, passando attraverso un prisma di vetro, dava luogo a uno spettro continuo di colori dal violetto al rosso (banda ottica da 380 a 780 nm). In effetti lo spettro cromatico può essere diviso in 6 parti principali – violetto, blu, verde, giallo, arancio, rosso – con una transizione graduale e sfumata da una all'altra.

I colori che percepiamo in un oggetto sono determinati dalla natura della luce riflessa dall'oggetto stesso. Così un corpo che riflette la luce in ugual misura a tutte le lunghezze d'onda dello spettro visibile (dal violetto al rosso) appare bianco all'osservatore. Un oggetto che riflette un particolare intervallo di lunghezze d'onda nel visibile appare di un particolare colore (ad esempio oggetti verdi riflettono la luce in un intervallo da 500 nm a 700 nm e assorbono la maggior parte dell'energia distribuita nel restante spettro visibile) (Evans, 1959).

E' stato verificato (Kiver, 1955) che componenti spettrali del rosso (R), del verde (V) e del blu (B), combinate in varie proporzioni (intensità), danno luogo a una vastissima gamma di colori, superiore a quella ottenibile con ogni altra combinazione di tre colori. Questi colori (rosso, verde e blu) sono anche chiamati primari.[1] I colori primari possono essere sommati per produrre i colori secondari: magenta (rosso più blu), ciano (verde più blu), giallo (rosso più verde). Mescolando i tre colori primari o un secondario con il primario complementare, nelle corrette proporzioni di intensità, si ottiene la luce bianca (Gonzalez e Wintz, 1977).

E' importante distinguere fra colori primari di luce (sopra considerati) e colori primari di pigmenti o coloranti. Per quanto riguarda questi ultimi, un colore primario è definito come quello che sottrae o assorbe un colore primario di luce e riflette o trasmette gli altri due. Pertanto i colori primari dei pigmenti sono il magenta, il ciano ed il giallo, mentre i colori secondari sono il rosso, il verde e il blu.

Venendo a considerare più in particolare il processo di percezione da parte del cervello umano dei colori, attraverso l'acquisizione e pre-elaborazione compiuta dall'occhio umano sopra indicata, si può anzitutto osservare che tale processo appare al momento attuale assai complesso e non ancora completamente spiegato, date le componenti fisiche, chimiche, elettriche, psicologiche che in esso intervengono (Eden, 1977; Land, 1978). In effetti due teorie si sono storicamente contese il campo per spiegare il processo della percezione del colore: quella tricromatica, detta anche di Young-Helmholtz, e quella dicromatica, detta anche di Hering.

Secondo la teoria dicromatica di Hering si avrebbero due tipi di sostanze che interverrebbero nella percezione: una sensibile al rosso, l'altra al blu. In effetti, poiché la sensibilità a un colore comporta la sensibilità anche per un colore complementare (il verde per il rosso e il giallo per il blu), si potrebbe anche parlare di teoria quadri-

[1] Per precisare la definizione dei colori primari, la International Commission on Illumination ha assegnato nel 1931 i valori di picco: B: 435,8 nm; V: 546,1 nm; R: 700 nm.

cromatica (ad esempio la sostanza stimolata positivamente dal rosso viene stimolata negativamente dal verde). Hering postulava anche una sostanza per il bianco-nero, cioè per la luminosità (Luccio, 1981).

Secondo la teoria tricromatica di Young-Helmholtz, si avrebbero nella retina tre tipi di coni, sensibili rispettivamente al rosso, al verde e al blu. Poiché i vari colori (compresi i colori acromatici) possono essere ottenuti da un'adeguata miscelazione dei tre colori, la teoria postula che questi tre tipi di recettori elementari siano stimolati in proporzioni corrispondenti all'arrivo di una luce di una certa composizione spettrale in modo da ricomporre a livello centrale le tre informazioni per dare il corretto colore della luce osservata.

Questa seconda teoria, sia per l'effettiva presenza a livello retinico (come già osservato) di tre tipi di coni sensibili a lunghezze d'onda diverse (fig. 2.2), sia per le esperienze cromatiche di miscelazione dei colori primari, è quella attualmente più seguita per la percezione del colore e per la definizione di tecniche e sistemi che acquisiscono, elaborano e presentano in campo ottico ed elettronico immagini a colori. In effetti, anche recentemente è stato verificato che è il "confronto" delle radiazioni ricevute dai tre tipi di coni che produce la sensazione del colore (Land, 1978).

## 2.4 Proprietà della visione

E' importante ricordare, anche in breve, le principali proprietà della visione, verificate sperimentalmente, che regolano la percezione della luce e delle immagini, in quanto di tali proprietà (come di quelle già precedentemente indicate) occorre tenere conto nella definizione dei sistemi di elaborazione delle immagini. Tali proprietà sono di seguito elencate.

*Sensibilità al contrasto*

E' noto che la risposta dell'occhio a variazioni dell'intensità luminosa è di tipo non lineare. Considerando, ad esempio, un fascio di luce di intensità $I + \Delta I$, circondato da un fondo di intensità $I$, se si analizza la differenza $\Delta I$ apprezzabile in funzione della intensità $I$, si trova che il rapporto $\Delta I/I$, detto frazione di Weber, è circa costante e vale $\sim 2\%$ (escludendo condizioni di intensità luminosa molto piccole o molto grandi). Poiché il differenziale del logaritmo di $I$ è immediatamente legato al differenziale di $I$, $dI$, dalla relazione:

$$d\{\log(I)\} = \frac{dI}{I} \qquad [2.1]$$

si può dedurre che uguali variazioni nel logaritmo dell'intensità luminosa danno luogo ad uguali variazioni apprezzabili, nella gamma di intensità per le quali la frazione di Weber è costante. Per questo motivo, in molti sistemi di elaborazione delle immagini, le operazioni sono effettuate sul logaritmo dell'intensità (livello di grigio) piuttosto che sull'intensità stessa.

*Effetto di Mach*

Considerando strisce uniformi, aventi ciascuna costante livello di grigio (contrasto bianco-nero), disposte una accanto all'altra, si può sperimentalmente verificare, osservandole, a partire dal nero (a sinistra) verso il bianco (a destra), che appaiono con i bordi destri più scuri di quelli a sinistra. Questo effetto, detto di Mach (più esattamente "*Mach band effect*"), deriva dalla risposta del sistema visivo nelle frequenze spaziali (vedi cap. 1): l'occhio possiede una sensibilità più bassa a frequenze spaziali alte e basse rispetto a quella che ha a frequenze intermedie (vedi anche fig. 2.3).

*Contrasto simultaneo*

Se diversi elementi di immagine, aventi lo stesso livello di grigio, sono posti in immagini con diverso contrasto (ad esempio su fondo bianco o su fondo nero), appaiono avere livello di grigio diverso, nel senso che sembrano più scuri gli elementi su fondo più chiaro. Questo effetto vale anche per immagini cromatiche (ad esempio una macchia bianca su fondo nero appare leggermente gialla se posta su fondo blu).

*Adattamento cromatico*

L'apprezzamento dei colori dipende dall'adattamento dell'osservatore. Dopo aver osservato a lungo una luce di un certo colore, avente alta intensità, togliendo la luce stessa appaiono immagini di colore complementare, dette anche immagini postume (ad esempio dopo intensa luce rossa appaiono immagini tendenti al ciano).

*Insensibilità ai colori*

Una percentuale apprezzabile della popolazione terrestre è soggetta a forme diverse di cecità ai colori (circa 8% dei maschi e 1% delle femmine). Alcune persone, chiamate monocromatiche, possiedono soltanto bastoncelli o bastoncelli con coni di un solo tipo e hanno pertanto una visione monocromatica. Altre, chiamate dicromatiche, possiedono solo due dei tre tipi di coni e possono distinguere solo alcuni colori.

*Colore soggettivo*

Con diverse esperienze è stato dimostrato come impulsi intermittenti di luce bianca appaiano diversamente colorati. Fechner, nel 1838, mostrò chiaramente questo fenomeno, facendo ruotare opportunamente un disco, dipinto per metà di nero e per metà di bianco. Questi fenomeni sono connessi alla risposta temporale del sistema visivo umano a impulsi di luce.

## 2.5 Modello per la visione monocromatica

Nel capitolo 1 (e in particolare nel § 1.4) sono state analizzate le proprietà principali dei sistemi bidimensionali, con particolare riferimento a quelli di tipo lineare, il cui comportamento viene individuato dalla conoscenza della risposta impulsiva $h(x, y)$

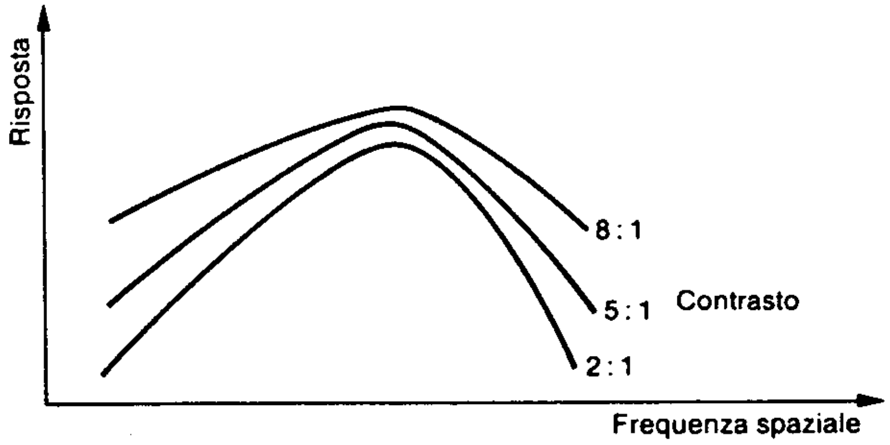



**Figura 2.3**
Variazioni tipiche della risposta $H_v(\omega_x, \omega_y)$ nelle frequenze spaziali del sistema visivo per diversi valori di contrasto (è mostrato il diagramma in funzione di una frequenza spaziale).

o della risposta nelle frequenze spaziali (funzione di trasferimento) $H(\omega_x, \omega_y)$, legate fra loro dalla trasformata di Fourier 2D.

Sono stati fatti molti studi ed esperimenti per cercare di applicare nel modo più conveniente i concetti dei sistemi 2D lineari al sistema visivo umano. Da numerose esperienze[2] è stato verificato che la funzione $H_v(\omega_x, \omega_y)$, risposta nelle frequenze spaziali del sistema visivo, ha una forma del tipo indicato nella figura 2.3, variabile con il contrasto dell'immagine di ingresso (rapporto fra il livello massimo e minimo del livello di grigio di un'immagine con variazione sinusoidale del livello di grigio stesso in una direzione, ad esempio secondo $y$). E' stato inoltre provato che, se l'immagine con variazione sinusoidale di ingresso è ruotata rispetto all'asse ottico dell'occhio, varia apprezzabilmente la forma delle curve $H_v(\omega_x, \omega_y)$ in funzione delle frequenze spaziali. Si può quindi affermare che il sistema visivo umano è non lineare e anisotropo (variante con la rotazione) (Pratt, 1978).

E' stato pertanto postulato, in un primo approccio, che la risposta non lineare dell'occhio a variazioni di intensità luminosa sia di tipo logaritmico e che tale non linearità avvenga all'inizio del sistema di elaborazione delle informazioni visive, cioè vicino ai coni e ai bastoncelli, prima che intervengano le interazioni spaziali fra i segnali visivi ricevuti dai singoli bastoncelli e coni. Su questa linea è stato definito il modello relativamente semplice per la visione monocromatica, illustrato in figura 2.4, nel quale dai recettori elementari sensibili alle diverse lunghezze d'onda si passa a un sistema non lineare con funzione di tipo logaritmico, che serve a "linearizzare" il sistema visivo, per entrare poi nel sistema lineare 2D definito da una certa funzione di

[2] Viene presentata un'immagine con variazione sinusoidale del livello di grigio con frequenza crescente, il cui contrasto viene variato in modo da apparire uguale (come valore massimo) a quello di un'immagine a frequenza fissa.

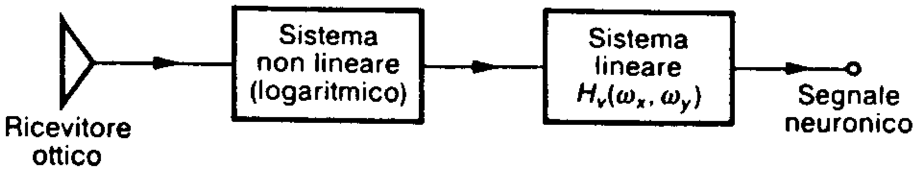



**Figura 2.4**
Modello per la visione monocromatica.

trasferimento $H_V(\omega_x, \omega_y)$ fino a giungere al segnale di uscita verso il sistema neuronico (nervo ottico-attivazione cerebrale).

Il modello logaritmico precedente ammette una relazione del seguente tipo fra intensità di ingresso $I_i(x,y)$ e intensità di uscita $I_u(x,y)$:

$$I_u(x,y)=k_1 \log[k_2+k_3 I_i(x,y)] \tag{2.2}$$

ove $k_i$ $(i=1,2,3)$ sono opportune costanti (Pratt, 1978).

Il modello precedente di figura 2.4 è stato variato in diversi modi, sostituendo alla non linearità di tipo logaritmico altre non linearità. Una di queste proposte introduce una risposta frazionaria, per cui la relazione [2.2] diviene:

$$I_u(x,y)=\frac{k_1 I_i(x,y)}{k_2+I_i(x,y)} \tag{2.3}$$

dove $k_1$ e $k_2$ sono costanti. Un'altra proposta si basa su una relazione in cui il legame non lineare è definito in forma di potenza del tipo:

$$I_u(x,y)=[I_i(x,y)]^s \tag{2.4}$$

essendo $s$ un'opportuna costante.

Con indagini più approfondite, è stato più recentemente definito un modello per il processo della visione di tipo più complesso, che è definito da 4 trasformazioni in cascata (fig. 2.5) (Pratt, 1978):

– un filtro spaziale 2D di tipo passa-basso (risposta $H_1(\omega_x, \omega_y)$) che tiene conto della limitata risoluzione dell'occhio legata alle dimensioni della lente di ingresso, alle aberrazioni ottiche e alle dimensioni dei coni e dei bastoncelli;

– un elemento di trasferimento non lineare, che introduce la non linearità sopra considerata (relazioni [2.2], [2.3], [2.4]);

– un sistema lineare 2D che tiene conto della interazione fra coni e soprattutto fra bastoncelli (fenomeno della inibizione laterale), avente la risposta nelle frequenze spaziali di tipo passa-banda $H_2(\omega_x, \omega_y)$ indicata in figura 2.5;

– un sistema lineare 1D che rappresenta il comportamento temporale della percezione visiva (in particolare per quanto riguarda il fatto che la percezione continua per un breve periodo di tempo dopo una eccitazione luminosa) avente la risposta in frequenza $H_3(\omega)$.

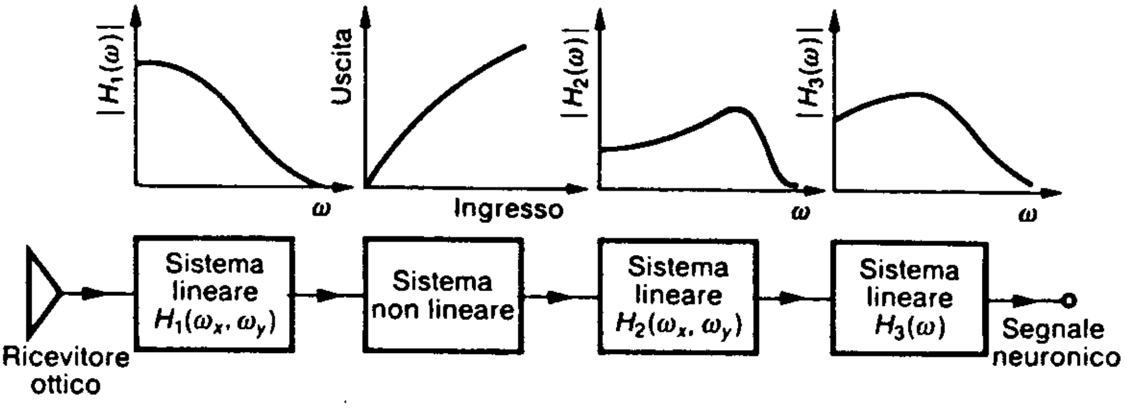



**Figura 2.5**
Modello più complesso per la visione monocromatica.

In sintesi si può osservare che già il modello semplificato di figura 2.4 è sufficiente per rappresentare il processo della visione monocromatica in molte applicazioni di elaborazione delle immagini, e che il modello più complesso di figura 2.5 è utile quando si voglia una maggiore fedeltà di rappresentazione del processo stesso.

## 2.6 Modello per la visione cromatica

E' stato già ricordato che la teoria tricromatica di Young-Helmholtz (§ 2.3) postula la presenza di tre tipi di recettori elementari, sensibili rispettivamente al rosso, al verde e al blu. E' stato anche osservato che la mescolazione dei tre colori (rosso, verde e blu) permette di ottenere i vari colori di pratico interesse. Pertanto modelli per la visione cromatica possono ottenersi con tre sistemi del tipo più semplice di figura 2.4 o più complessi di figura 2.5, uno relativo al rosso, uno al verde e il terzo al blu.

In seguito alle misure sperimentali che hanno permesso di determinare le risposte spettrali dei tre tipi di coni presenti nella retina (vedi fig. 2.2) e allo studio delle loro interazioni per la percezione del colore, è stato proposto (Frei, 1974) un modello tricromatico più preciso e articolato, del tipo indicato in figura 2.6. In questo modello si hanno tre recettori elementari con risposte spettrali $s_1(\lambda)$ (sul verde), $s_2(\lambda)$ (sul giallo-verde) e $s_3(\lambda)$ (sul blu), che forniscono i segnali di uscita:

$$e_1 = \int L(\lambda) s_1(\lambda)\, d\lambda \qquad [2.5]$$

$$e_2 = \int L(\lambda) s_2(\lambda)\, d\lambda \qquad [2.6]$$

$$e_3 = \int L(\lambda) s_3(\lambda)\, d\lambda \qquad [2.7]$$

dove $L(\lambda)$ rappresenta la distribuzione spettrale di energia della luce incidente sull'occhio. I tre segnali $e_1$, $e_2$ ed $e_3$ entrano quindi in sistemi non lineari (di tipo logaritmico

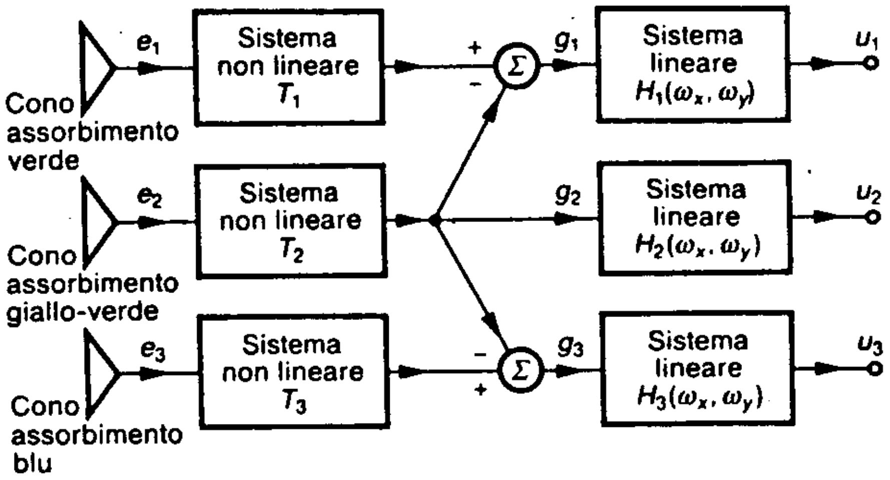



**Figura 2.6**
Modello per la visione tricromatica (percezione del colore).

$T_1$, $T_2$ e $T_3$), le cui uscite sono combinate in modo additivo, fornendo i segnali di uscita:

$$g_1 = \log(e_1) - \log(e_2) = \log\frac{e_1}{e_2} \quad [2.8]$$

$$g_2 = \log(e_2) \quad [2.9]$$

$$g_3 = \log(e_3) - \log(e_2) = \log\frac{e_3}{e_2}. \quad [2.10]$$

I segnali $g_1$, $g_2$ e $g_3$ entrano infine nei sistemi 2D lineari spaziali $H_1(\omega_x, \omega_y)$, $H_2(\omega_x, \omega_y)$ e $H_3(\omega_x, \omega_y)$, dai quali escono i segnali $u_1$, $u_2$ e $u_3$ verso il sistema nervoso e cerebrale centrale.

Il modello precedente è risultato abbastanza fedele per rappresentare gli aspetti più importanti del processo di percezione cromatica. In analogia a quanto indicato per la visione monocromatica, esso può comunque essere agevolmente modificato e arricchito di altri elementi di trasferimento. Anzitutto la non linearità logaritmica può essere sostituita con altri tipi di non linearità (vedi le relazioni [2.3] e [2.4]). Si possono poi aggiungere i diversi effetti in cascata, già indicati in figura 2.5, arrivando al modello esteso più complesso mostrato in figura 2.7, con significato analogo dei blocchi $H_{i1}(\omega_x, \omega_y)$, $H_{i2}(\omega_x, \omega_y)$ e $H_{i3}(\omega)$ (con $i = 1, 2, 3$).

## 2.7 Acquisizione e registrazione ottica e opto-elettronica delle immagini in bianco-nero e a colori

Nei paragrafi precedenti abbiamo esaminato il processo di acquisizione da parte dell'occhio umano delle immagini in bianco-nero e a colori, e abbiamo accennato ai

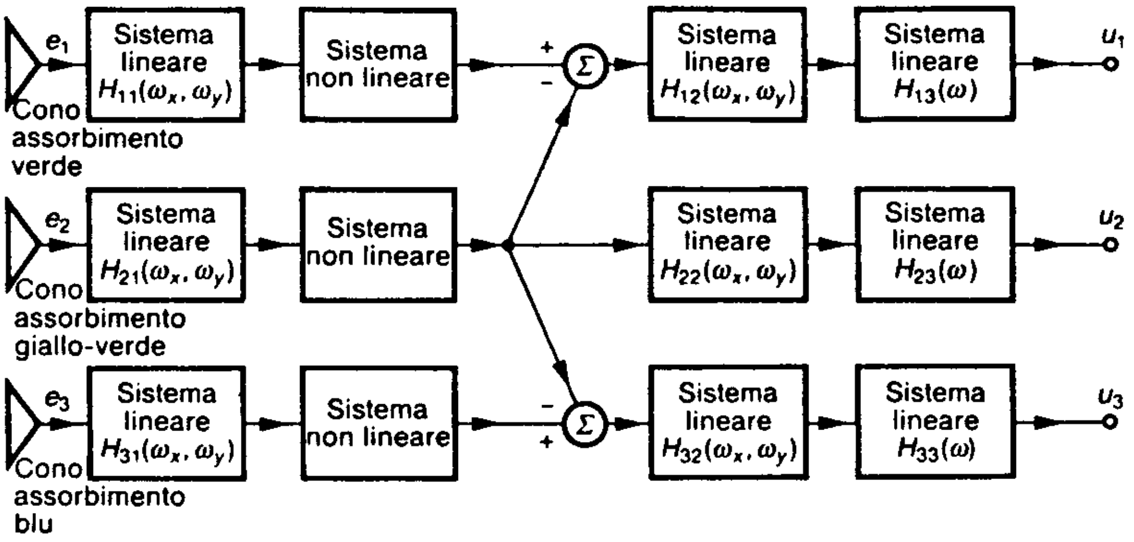



**Figura 2.7**
Modello più complesso e dettagliato per la visione tricromatica (percezione del colore).

complessi fenomeni di percezione delle immagini stesse a livello nervoso e cerebrale. E' noto anche che tali immagini, una volta acquisite e percepite, restano nella memoria più o meno cosciente (immagini estremamente lontane nel tempo possono, in particolari condizioni fisiche e psichiche, riapparire nitide come se fossero state da poco acquisite).

Per ottenere un'acquisizione e conservazione duratura delle immagini, con adeguata risoluzione dei dettagli, sono stati peraltro sviluppati molti sistemi ottici e opto-elettronici, operanti in modo più o meno automatico, quali le macchine fotografiche, i sensori multispettrali ecc., che memorizzano le immagini stesse su pellicole, stampe o altri supporti. Per inviare le immagini a distanza, ove esse possono essere direttamente acquisite dall'osservatore umano o di nuovo acquisite e conservate con i sistemi di cui sopra, sono stati sviluppati appositi apparati di ripresa e trasmissione, come il facsimile o la televisione. Infine sono stati introdotti sensori speciali, operanti in bande dello spettro elettromagnetico diverse dalla banda ottica (cioè al di fuori dell'intervallo di $380 \div 780$ nm), che, come "occhi elettromagnetici", permettono di acquisire informazioni bidimensionali o multidimensionali del mondo esterno, come i radiometri a microonde, il radar o il lidar (quest'ultimo, operante in banda ottica o a lunghezze d'onda vicine, ma con il principio del radar, cioè emettendo radiazione elettromagnetica, di cui viene acquisita e registrata quella che torna indietro dall'oggetto "osservato"). Peraltro, anche questi sensori speciali permettono di ripresentare le informazioni raccolte in forma visiva nella banda ottica come immagini in bianco-nero o a colori.

Dei vari sistemi e apparati precedenti, viene nel seguito presentata una descrizione sintetica, data la loro importanza per i moderni sistemi di elaborazione numerica delle immagini, che in genere elaborano immagini fornite proprio dai sistemi e apparati indicati.

*Macchine e pellicole fotografiche*

Senza entrare in molti dettagli, è ben noto che si possono acquisire immagini (fotografie) regolando le caratteristiche ottiche della macchina fotografica, agendo sulla posizione relativa delle lenti per le varie distanze in modo da mettere a fuoco l'oggetto osservato, variando l'apertura del diaframma per regolare la quantità di luce che giunge alle lenti e quindi alla pellicola da impressionare e scegliendo i tempi di scatto più opportuni in modo da variare il tempo di esposizione della pellicola stessa.

Di grande importanza per le diverse applicazioni di acquisizione ed elaborazione delle immagini è la scelta della pellicola fotografica. La struttura tipica di una pellicola fotografica comprende, come indicato schematicamente in figura 2.8, un primo strato trasparente di gelatina nel quale sono sospesi granuli di alogenuri di argento sovrapposto a un apposito supporto che può essere trasparente od opaco (vetro, acetato, carta). Se il supporto è trasparente, si ottiene una trasparenza, nell'altro caso un'impressione a riflessione. Quando la pellicola è esposta alla luce, avviene un processo di conversione elettrochimica e parte dei granuli si trasforma in argento metallico (in effetti si stabilisce quello che viene detto un centro di sviluppo). Nel processo di sviluppo, un apposito agente chimico fa definitivamente convertire i granuli impressionati (cioè con i centri di sviluppo) in argento metallico. La pellicola viene quindi fissata permanentemente eliminando chimicamente i granuli non impressionati. In breve: più luce giunge su una certa area della pellicola, maggiore è il numero di granuli trasformati in argento metallico che restano e, dato che questi sono opachi nella banda ottica, più elevato è il livello di grigio (grado di opacità) che resta nell'area impressionata. Nasce così la comune pellicola negativa (Gonzalez e Wintz, 1977).

Per ottenere un'immagine positiva, si ripete il processo precedente (il negativo è proiettato su una carta sensibile che contiene un'emulsione con alogenuri di argento analoghi a quelli della pellicola originaria): si ottiene con lo sviluppo un'immagine che rappresenta, con i suoi livelli di grigio, la scena reale osservata.

I parametri in gioco nella tecnica fotografica sono molteplici. Ad esempio la dimensione dei granuli determina la risoluzione o discriminazione dei dettagli della scena osservata nel negativo e nei suoi successivi sviluppi. Di particolare importanza è il contrasto o gamma dei livelli di grigio ottenibili (si parla di pellicole e riprese a basso contrasto o alto contrasto). Il contrasto dipende poi dall'esposizione, che in

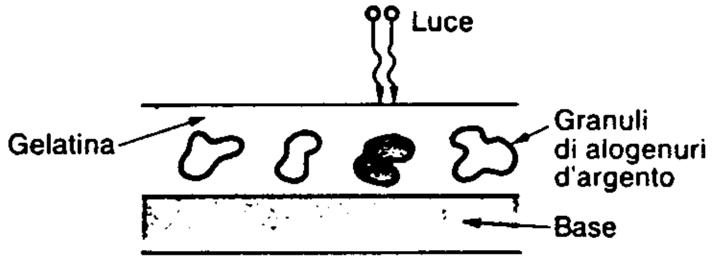



**Figura 2.8**
Struttura tipica di una pellicola fotografica per foto in bianco e nero.

genere viene misurata dall'energia per unità di area, $E$, a cui la pellicola viene impressionata; indicando con $I$ l'intensità della luce incidente e con $T$ il tempo di esposizione, si ha la semplice relazione:

$$E = IT \tag{2.11}$$

che viene usata, assieme alla densità di argento $D$ nella pellicola, per descrivere le proprietà fotosensibili della pellicola fotografica. Più esattamente si fa riferimento a curve di $D$ in funzione di $\log E$, del tipo indicato in figura 2.9. Queste curve caratteristiche $D$-$\log E$ sono anche chiamate curve *H & D* (da Hurter e Driffield che le hanno proposte). E' interessante osservare che si ha una zona lineare, la cui pendenza è detta gamma ($\gamma$) della pellicola, e due zone di appiattimento, una per bassi valori di $\log E$ e l'altra per alti valori di $\log E$, nelle quali la densità dell'argento è praticamente indipendente dall'esposizione. Il valore di $\gamma$ è in genere usato per indicare il contrasto della pellicola: maggiore è la pendenza, maggiore è il contrasto. Pellicole comuni hanno valori di $\gamma$ da 0,7 a 1; pellicole ad alto contrasto hanno valori di $\gamma$ da 1,5 a 10. Di regola pellicole con contrasto medio sono usate per la riproduzione a toni (livelli di grigio) continui, mentre pellicole ad alto contrasto vengono impiegate per la riproduzione di linee di disegni o altre applicazioni particolari (Mees e James, 1966).

Per quanto riguarda la fotografia a colori, viene in genere usata una pellicola a più strati del tipo indicato in figura 2.10. Il primo strato è un'emulsione di alogenuri d'argento (bromuro d'argento) sensibile al blu. Segue un filtro giallo che impedisce alla luce blu di passare alle emulsioni di alogenuri d'argento sensibili al verde e al rosso, che sono poste al di sotto, una di seguito all'altra. Le emulsioni sensibili ai colori poggiano su un supporto trasparente, che termina in basso con uno strato

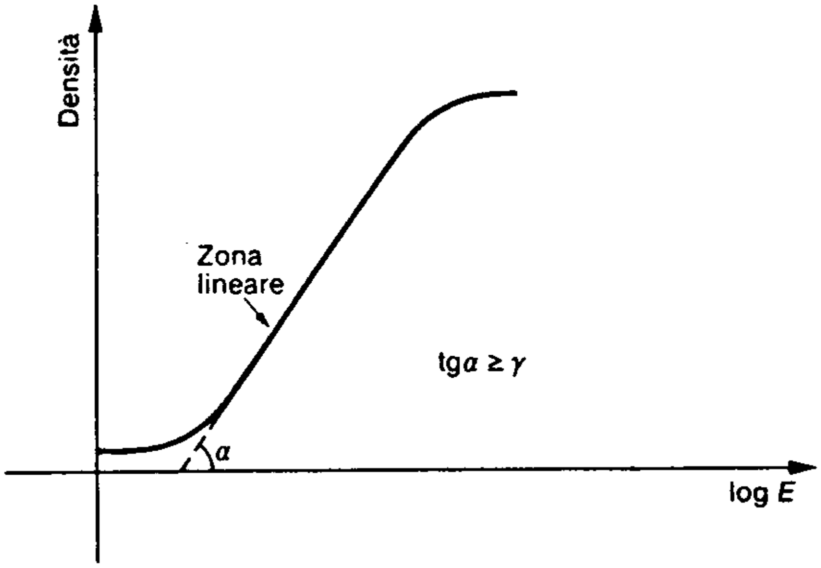



**Figura 2.9**
Variazione della densità di argento ($D$), in funzione del logaritmo dell'energia $E$ per unità di area, per una tipica pellicola fotografica.

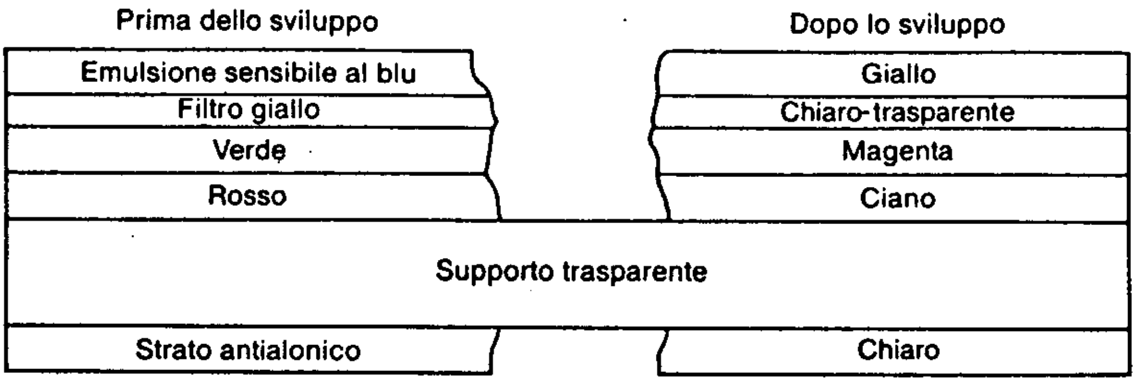



**Figura 2.10**
Struttura tipica di una pellicola fotografica per foto a colori.

antialonico. Dopo lo sviluppo, lo strato di emulsione blu viene convertito in una trasparenza gialla (la cui concentrazione è proporzionale all'entità di esposizione del blu per una trasparenza negativa e inversamente proporzionale per una trasparenza positiva). Analogamente, dopo lo sviluppo, gli strati con emulsioni verde e rossa divengono rispettivamente di colore magenta e ciano (blu-verde). Le stampe a colori possono essere ottenute con diversi processi (Evans, 1959). La tecnica più comunemente usata consiste nel produrre una stampa positiva da una trasparenza negativa a colori.

Tecniche più semplici per la fotografia a colori, usate prima dell'introduzione della pellicola a più strati sopra indicata, impiegano tre riprese con pellicole pancromatiche (cioè sensibili a tutti i colori della banda ottica) e tre filtri (blu, verde e rosso) con processo di sintesi additiva (può essere usata anche la sintesi sottrattiva, usando i colori complementari a quelli di ripresa, cioè il ciano per il rosso, il giallo per il blu e il magenta per il verde).

Particolari emulsioni sono state infine sviluppate per estendere la banda ottica di acquisizione. Di particolare interesse sono le pellicole con emulsioni per l'infrarosso, che oltre a coprire la banda ottica o parte di essa hanno la loro massima sensibilità nell'infrarosso vicino (picco di sensibilità, ad esempio, a 800 nm): esse permettono di acquisire informazioni legate anche allo stato termico dell'oggetto osservato.

### *Sensori multispettrali e relative immagini*

Mediante fotomoltiplicatori o fotoelementi (in particolare rivelatori a semiconduttori) è possibile convertire un'informazione luminosa incidente in segnale elettrico (corrente o tensione) corrispondente. Sono disponibili fotoelementi o fotorivelatori sensibili a particolari lunghezze d'onda o a determinate bande della radiazione incidente.

Unendo al fotorivelatore un opportuno sistema di scansione meccanica, che esplori l'oggetto o la scena osservata "riga dopo riga", è possibile ottenere un'immagine, o mappa, definita appunto dalle righe di scansione (la cui distanza determina la riso-

luzione spaziale della ripresa): l'intensità del segnale elettrico rivelato lungo le linee di scansione costituisce il contrasto o livello di grigio dell'immagine stessa.

Sistemi opto-meccanici di questo tipo sono ormai disponibili per l'acquisizione di immagini esterne nelle varie bande elettromagnetiche. In particolare per il telerilevamento o rilevamento a distanza (ad esempio della superficie terrestre, da pallone, aereo o satellite; vedi cap. 15) sono stati sviluppati negli ultimi anni i sensori multispettrali a scansione (*multispectral scanner*, MSS). Un sistema tipico MSS è costituito da uno specchio oscillante (per effettuare la scansione), che riflette la radiazione raccolta su un concentratore o paraboloide, che focheggia la radiazione stessa verso un gruppo (o "*array*") di fotorivelatori, aventi sensibilità massima a diverse lunghezze d'onda. In sistemi MSS per il telerilevamento della superficie terrestre (quali quelli operanti a bordo dei satelliti LANDSAT) si usano 4 fotorivelatori, operanti nelle seguenti bande: da 500 a 600 nm (verde); da 600 a 700 nm (giallo-arancio); da 700 a 800 nm (rosso); da 800 a 1100 nm (infrarosso prossimo). Per facilitare la separazione spettrale nelle 4 bande, un apposito prisma è interposto fra il sistema di focheggiamento e i fotorivelatori. Un apparato di questo tipo fornisce contemporaneamente 4 immagini o mappe della superficie esplorata (che vengono registrate a bordo e trasmesse rapidamente a terra a tempi determinati o su telecomando).

### *Facsimile*

I pincìpi della trasmissione a distanza di caratteri stampati, mappe, figure e più in generale immagini in bianco e nero furono posti già nel 1843 dall'inglese Alexander Bain. Questi sistemi di trasmissione di immagini stampate o foto, detti facsimile o di telefotografia, si sono sviluppati in molteplici soluzioni. Di solito il documento o foto da trasmettere a distanza viene esplorato, nella stazione di trasmissione, da un fotorivelatore, con un'opportuna scansione; il segnale elettrico fornito dal fotorivelatore viene inviato a distanza (ad esempio su un canale telefonico), e, nella stazione di ricezione, riconvertito in forma ottica (con intensità proporzionale al livello di grigio dell'originale), andando a impressionare una pellicola o carta sensibile alla luce con una scansione in sincronismo con la trasmissione.

Le modalità di scansione sono molteplici: un tamburo rotante con spostamento contemporaneo longitudinale, sul quale è fissato aderente il documento o foto da trasmettere, di fronte a un fotorivelatore fisso; uno specchio rotante del tipo indicato sopra per i sensori multispettrali, che effettua la scansione per linee; un disco con fessura a spirale ruotante di fronte a una fessura. Anche le tecniche usate per impressionare un materiale apposito in ricezione per riprodurre l'immagine sono molteplici e comprendono, oltre a quella indicata di tipo ottico, l'uso di *trasduttori* elettrotermici o elettrochimici su apposita carta (che rimane impressionata o incisa dal calore o da agenti chimici) oppure il trasferimento di pigmento su carta, come avviene ad esempio con la carta carbone.

*Televisione*

Mentre il facsimile permette di trasmettere a distanza immagini fisse (documenti, foto ecc.), la televisione risolve il problema della trasmissione da un punto ad un altro di immagini in movimento, sia in bianco e nero sia a colori.

Considerando inizialmente la televisione in bianco e nero, essa trasforma la funzione $f(x, y, t)$, che rappresenta la scena bidimensionale da riprendere, in semplice funzione del tempo $g(t)$, attraverso il processo di scansione e la considerazione delle proprietà della visione umana.

L'esplorazione del quadro di ripresa, di lati $a$ e $b$, avviene (in genere da parte del pennello elettronico della telecamera) secondo linee parallele leggermente inclinate (con rapido ritorno sull'asse $y$) come indicato schematicamente in figura 2.11. Se $N$ è il numero di linee di scansione, l'immagine contenuta nel quadro di ripresa può considerarsi costituita da un numero $n$ di areole elementari (quadratini di lato $b/N$) pari a (Benelli, Cappellini, Del Re, 1976):

$$n = \frac{ab}{(b/N)^2} = \frac{a}{b} N^2. \qquad [2.11]$$

Indicando con $\nu$ la frequenza di scansione (inverso del tempo necessario per compiere un'intera esplorazione del quadro, ovvero numero di quadri per secondo), si può facilmente verificare che il caso peggiore, per quanto riguarda la rapidità di variazione del livello di grigio del processo di scansione, corrisponde alla situazione in cui le areole elementari adiacenti sono alternativamente bianche e nere (forma d'onda rettangolare di variazione del livello di grigio e del segnale $g(t)$ temporale ottenuto con la scansione). Il periodo $T_\nu$ della forma d'onda rettangolare $g(t)$ risulta:

$$T_\nu = \frac{1}{\frac{1}{2}\frac{a}{b}N^2\nu} = \frac{2b}{aN^2\nu}. \qquad [2.12]$$

Poiché, per una rappresentazione accettabile della forma d'onda rettangolare, occorre una banda $B$ almeno pari a $1/T_\nu$, dalla [2.11] si ha:

$$B = \frac{aN^2\nu}{2b} = \frac{1}{2} n\nu \qquad [2.13]$$

che rappresenta la banda televisiva richiesta per la trasmissione dell'immagine.

E' evidente che i dettagli dell'immagine acquisita e trasmessa saranno tanto più piccoli e fini, quanto maggiore è $N$ (scelto pari a 625 nel sistema europeo e 525 nel sistema americano), mentre la fedeltà di rappresentazione del movimento delle scene sarà tanto maggiore quanto maggiore è $\nu$. Questo valore è stato scelto tenendo conto delle proprietà di risposta temporale dell'occhio umano (pari a 25 quadri/s nel sistema europeo e 30 quadri/s nel sistema americano).

Per lo standard europeo (e in particolare italiano), sostituendo i valori precedenti nella [2.13], e scegliendo un rapporto $a/b = 4/3$, si ha $B \cong 6$ MHz. In pratica si usa

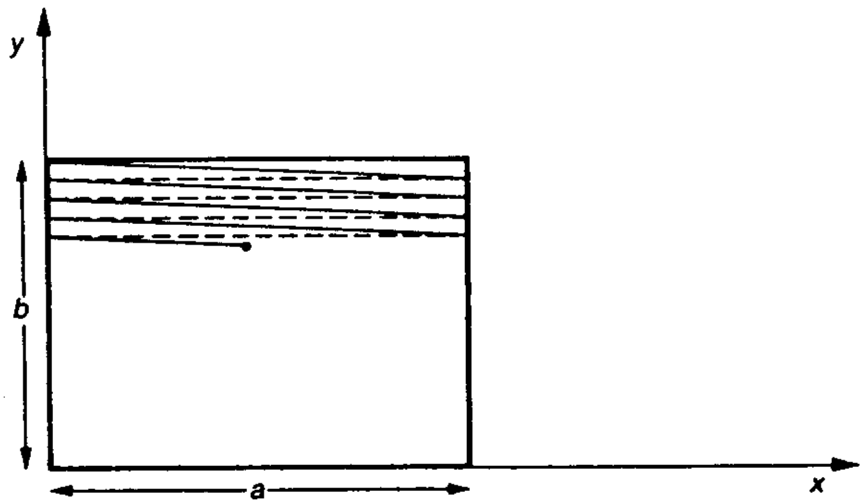



**Figura 2.11**
Schema del processo di scansione televisiva sul quadro di dimensioni *a* e *b*.

$B = 5$ MHz e il numero di areole o dettagli trasmessi è di circa 210000 al secondo.

Il segnale video trasmesso, con opportuni sincronismi, viene utilizzato nel ricevitore televisivo per ripercorrere sullo schermo con la stessa scansione lasciando in ogni areola un contrasto (livello di grigio) pari a quello corrispondente nell'immagine ripresa.

Nella televisione a colori si utilizzano le proprietà della percezione cromatica con i tre colori primari (rosso, verde e blu) precedentemente considerati (Kiver, 1955). Più in particolare, nei sistemi di televisione a colori detti compatibili, il segnale video contiene due informazioni: l'intensità luminosa (luminanza) della scena analoga a quella del sistema monocromatico e l'informazione di colore (crominanza), ottenuta mediante tre filtri che acquisiscono il rosso, il verde e il blu e li trasferiscono a tre tubi da ripresa. In pratica il segnale di luminanza viene ottenuto dai tre segnali di colore; una tipica espressione è la seguente:

$$s_L = 0{,}30 s_R + 0{,}59 s_V + 0{,}11 s_B \qquad [2.12]$$

ove $s_L$, $s_R$, $s_V$ e $s_B$ sono, rispettivamente, i segnali di luminanza, rosso, verde e blu. Inoltre vengono mescolati i tre colori primari per produrre due colori derivati. In ricezione, con operazioni inverse effettuate sui segnali $s_L$ e colori derivati, si riottengono i tre colori primari rosso, verde e blu, che vengono inviati ai tre cannoni elettronici del cinescopio di riproduzione. Questo ha lo schermo con tre fosfori colorati, disposti a punti alterni come ai vertici di piccoli triangoli equilateri; nel sistema detto a maschera, è inserita una speciale superficie (che copre i fosfori all'interno del tubo) che possiede circa 200000 forellini posti in maniera tale che gli elettroni provenienti dai tre diversi cannoni elettronici, passandovi attraverso, vadano a colpire rispettivamente il fosforo rosso, quello verde o quello blu. Sono stati sviluppati anche ricevitori a colori con un solo cannone e schermo costituito da strisce di materiale elettrolumi-

nescente (circa 2400), alternate, capaci di emettere luce rossa, verde e blu, se opportunamente eccitate dai segnali cromatici.

*Radiometri a microonde e relative mappe*

Già nell'analizzatore multispettrale sopra considerato è presente un rivelatore operante nella banda dell'infrarosso prossimo, al di fuori del visibile. L'interesse a raccogliere informazioni da regioni dello spettro al di fuori della banda ottica è andato crescendo, soprattutto negli ultimi anni (per la biomedicina e per il telerilevamento). Sono stati così sviluppati sistemi con rivelatori operanti a lunghezze d'onda maggiori di quelle della banda ottica, in particolare a microonde (radiometri a microonde).

Il rivelatore è ora costituito da un apposito ricevitore, accordato alle lunghezze d'onda di lavoro, al quale giungono le radiazioni elettromagnetiche raccolte dall'ambiente osservato attraverso un'opportuna antenna (a paraboloide, ad array ecc.). Il segnale ricevuto e amplificato può essere convertito in forma di livello di grigio e, con opportuna scansione a fasce parallele (come nei sistemi ottici considerati), si possono ottenere informazioni bidimensionali della scena osservata, presentabili in forma di mappa o di immagine.

*Radar e lidar e relative mappe*

Oltre ai sistemi passivi, come gli analizzatori multispettrali e i radiometri a microonde, che raccolgono la radiazione elettromagnetica in arrivo dall'ambiente osservato, sono stati sviluppati sistemi attivi, che emettono onde elettromagnetiche (opportunamente modulate) in determinate direzioni e raccolgono la parte di radiazione che ritorna dalle direzioni stesse esplorate.

In particolare il radar, introdotto per scopi bellici per individuare veicoli, navi o aerei nemici, utilizzato ampiamente per la navigazione civile aerea e marittima, permette di individuare, con una scansione circolare dell'antenna di trasmissione e ricezione, gli oggetti o bersagli nell'ambiente circostante, misurandone la distanza (attraverso il tempo di ritardo fra il segnale – ad esempio di forma impulsiva – trasmesso e il segnale ricevuto) e rappresentandoli su un apposito schermo circolare. Più recentemente sono stati introdotti i radar a visione laterale (*side looking radar*, SLR), soprattutto per scopi di telerilevamento della superficie terrestre, i quali effettuano una scansione a strisce parallele (come nei radiometri, ma ora obliqua per poter differenziare i vari oggetti secondo la loro diversa distanza dal radar) e producono, su pellicola ottica o nastro magnetico, mappe della zona osservata.

Analogamente al radar normale o radar SRL opera il lidar (radar ottico), il quale utilizza onde elettromagnetiche nella banda ottica o bande contigue, in genere emesse da un laser per le sue proprietà di monocromaticità (concentrazione della potenza emessa su una lunghezza d'onda) e di propagazione anche a notevoli distanze con fascio ristretto.

## Riferimenti bibliografici

Benelli G., Cappellini V., Del Re E., *Note di comunicazioni elettriche* (G. & G. Editrice, Firenze 1976).
Eden M., *Visual Image Processing in Animals and Man*, in Simon J. C. e Rosenfeld A. (a cura di), "Digital Image Processing and Analysis" (Noordhoff, Leida 1977).
Evans R. M., *An Introduction to Color* (Wiley, New York 1959).
Gonzalez R. C., Wintz P., *Digital Image Processing* (Addison-Wesley, Londra e Sydney 1977).
Kiver M. S., *Color Television Fundamentals* (McGraw-Hill, New York 1955).
Land E. H., *Una nuova teoria della visione dei colori*, Le Scienze, N. 115, 52-68 (1978).
Luccio R., *Psicologia della percezione del colore*, in "Atti del Convegno Elaborazione del Colore" (IBM Italia, Roma 1981).
Mees C. E. K., James T. H., *The Theory of the Photographic Process* (MacMillan, New York 1966).
Pierantoni R., *L'occhio e l'idea* (Boringhieri, Torino 1981).
Pratt W. K., *Digital Image Processing* (Wiley, New York 1978).

# Capitolo 3

# Conversione delle immagini in forma numerica e ricostruzione continua

## 3.1 Introduzione

Un aspetto estremamente importante nell'elaborazione numerica delle immagini è rappresentato dalla conversione in forma numerica delle immagini stesse (conversione analogico-numerica, CAN). Tale conversione comprende tre operazioni fondamentali: campionamento spaziale, quantizzazione, codifica (in genere binaria).

In questo capitolo sono descritte le operazioni precedenti, con particolare riferimento al campionamento, che è la prima e più importante di esse. E' trattato anche il problema inverso della ricostruzione dell'immagine continua dai campioni o dalla sua rappresentazione numerica (conversione numerico-analogica, CNA). Per i due processi di conversione sono pure presentati tipici sistemi utilizzati in pratica.

## 3.2 Campionamento spaziale

Consideriamo un'immagine in bianco e nero, rappresentata dalla funzione 2D continua $f(x,y)$ (livello di grigio o intensità), quale considerata nel capitolo 1. In un'operazione di campionamento spaziale ideale, i campioni dell'immagine sono ottenuti moltiplicando la funzione $f(x,y)$ per una funzione di campionamento del tipo:

$$c(x,y)=\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}\delta(x-n_1\Delta x,y-n_2\Delta y) \qquad [3.1]$$

composta di un numero infinito di operatori di Dirac, disposti su una griglia rettangolare di passo $\Delta x$ secondo $x$ e $\Delta y$ secondo $y$ (fig. 3.1).

L'immagine campionata viene così ad essere rappresentata nella forma seguente:

$$f_c(x,y)=f(x,y)c(x,y)=\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}f(n_1\Delta x,n_2\Delta y)\delta(x-n_1\Delta x,y-n_2\Delta y) \qquad [3.2]$$

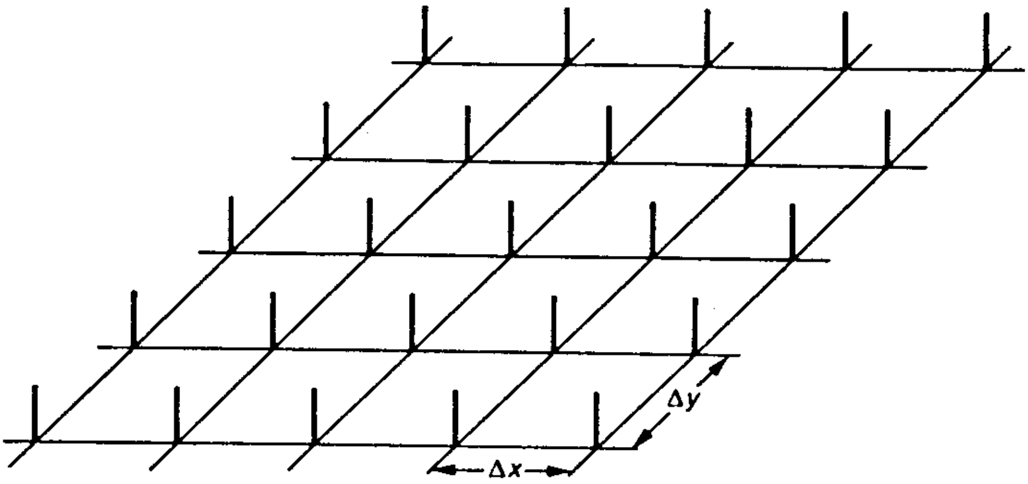



**Figura 3.1**
Funzione di campionamento $c(x, y)$, costituita da operatori di Dirac disposti su una griglia rettangolare di passo $\Delta x$ e $\Delta y$.

avendo portato la funzione $f(x, y)$ entro la sommatoria doppia, ove, per la proprietà dell'operatore di Dirac (vedi [1.43]), rimane definita solo nei punti di campionamento $(n_1 \Delta x,\ n_2 \Delta y)$ (Pratt, 1978). I valori così ottenuti $f(n_1 \Delta x,\ n_2 \Delta y)$ sono chiamati campioni spaziali (o semplicemente campioni) della funzione $f(x, y)$ che rappresenta l'immagine considerata.

Per il teorema della convoluzione (nella forma duale della [1.27]), lo spettro $F_c(\omega_x, \omega_y)$ dell'immagine campionata $f_c(x, y)$ risulta essere definito come la convoluzione degli spettri $F(\omega_x, \omega_y)$ della $f(x, y)$ e $C(\omega_x, \omega_y)$ della $c(x, y)$, cioè:

$$F_c(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{4\pi^2} F(\omega_x, \omega_y) \circledast C(\omega_x, \omega_y). \tag{3.3}$$

Dalla relazione [3.3] si può ottenere la seguente espressione, che mostra la struttura dello spettro dell'immagine campionata (Pratt, 1978):

$$F_c(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} F(\omega_x - n_1 \omega_{xc}, \omega_y - n_2 \omega_{yc}) \tag{3.4}$$

ove $\omega_{xc} = (2\pi)/(\Delta x)$, $\omega_{yc} = (2\pi)/(\Delta y)$ sono le frequenze angolari di campionamento (essendo $\nu_{xc} = 1/(\Delta x)$ e $\nu_{yc} = 1/(\Delta y)$ le frequenze spaziali di campionamento).

La relazione [3.4] mostra che lo spettro dell'immagine campionata è costituito (fig. 3.2), dalla ripetizione infinita dello spettro dell'immagine continua secondo $\omega_x$ e $\omega_y$ sulla griglia rettangolare di passo, rispettivamente, $\omega_{xc}$ e $\omega_{yc}$, in analogia a quanto ben noto per il campionamento delle funzioni unidimensionali (segnali) (Atzeni, Cappellini, 1972) (vedi anche § 1.3).

Dalle considerazioni precedenti e dalla figura 3.2 si vede chiaramente che, se nel processo di campionamento sono usati passi di campionamento spaziale $\Delta x$ e $\Delta y$ troppo grandi, gli spettri ripetuti secondo le direzioni degli assi $\omega_x$ e $\omega_y$ si sovrap-

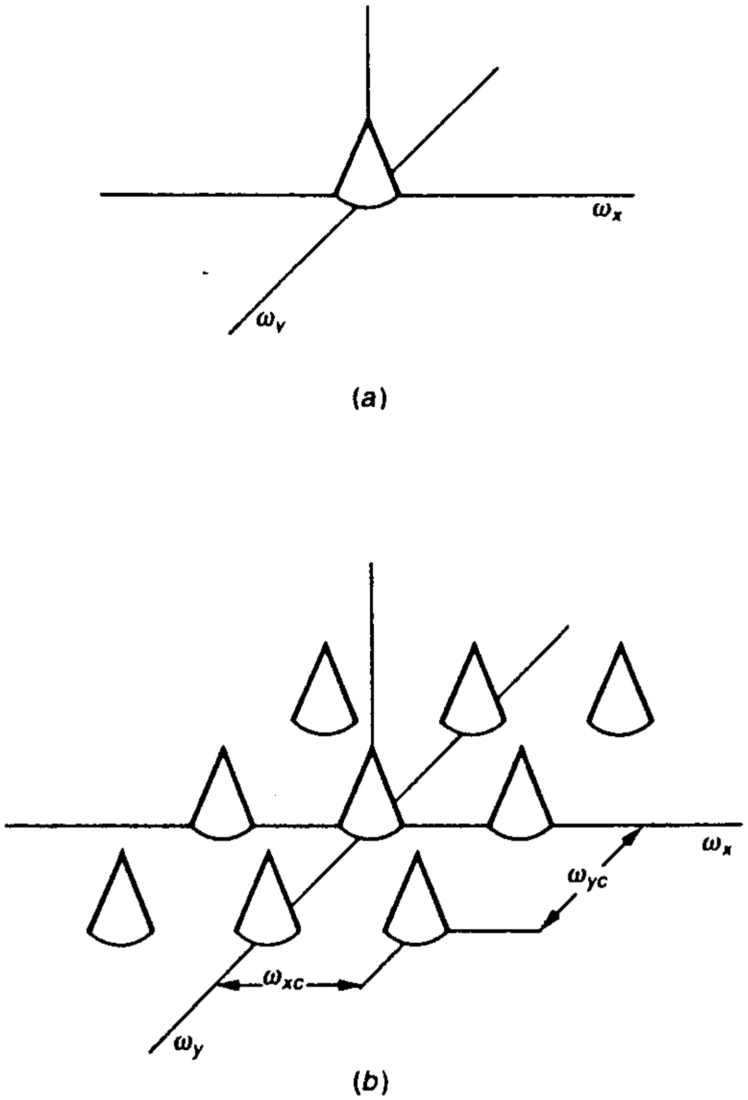



**Figura 3.2**
(*a*) Spettro dell'immagine originale; (*b*) spettro dell'immagine campionata.

pongono (condizione di "*aliasing*") con la conseguente impossibilità di riottenere lo spettro dell'immagine originaria (centrato sull'origine degli assi), ad esempio mediante filtraggio passa-basso.

In effetti, in analogia a quanto noto per il campionamento di funzioni 1D (segnali), si possono definire le condizioni di campionamento corretto (teorema del campionamento) di un'immagine in funzione delle frequenze spaziali massime $\nu_{xM}$ e $\nu_{yM}$ (o frequenze angolari spaziali massime $\omega_{xM}$ e $\omega_{yM}$):

$$\Delta x \leq \frac{1}{2\nu_{xM}}, \quad \Delta x \leq \frac{\pi}{\omega_{xM}} \qquad [3.5]$$

$$\Delta y \leq \frac{1}{2\nu_{yM}}, \quad \Delta y \leq \frac{\pi}{\omega_{yM}} \qquad [3.6]$$

ovvero:

$$\nu_{xc} \geqslant 2\nu_{xM}, \qquad \omega_{xc} \geqslant 2\omega_{xM} \tag{3.7}$$

$$\nu_{yc} \geqslant 2\nu_{yM}, \qquad \omega_{yc} \geqslant 2\omega_{yM} \tag{3.8}$$

cioè la frequenza di campionamento spaziale deve essere maggiore del (o uguale al) doppio della frequenza spaziale massima della $f(x,y)$ (sia per $\nu_x$ sia per $\nu_y$).

In genere, nelle operazioni di campionamento pratico delle immagini, si sceglie un unico valore del passo di campionamento spaziale ($X$) uguale al più piccolo dei due valori $\Delta x$ e $\Delta y$ (frequenza di campionamento $\nu_c = 1/X$):

$$X = \begin{cases} \Delta x \\ \Delta y \end{cases} \tag{3.9}$$

in modo da avere una griglia di campionamento quadrata, cioè campioni $f(n_1 X, n_2 X)$ o $f(n_1, n_2)$ (per maggiore semplicità di notazione) equidistanti spazialmente secondo i due assi $x$ e $y$.

Per un'immagine di lati $a$ e $b$, si ottiene così una matrice rettangolare di dimensione $N \times M$ ($N = a/X$, $M = b/X$) dei campioni $f(n_1, n_2)$, in cui le righe corrispondono a campioni secondo $y$ e le colonne a campioni secondo $x$:

$$\begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \dots & f(0,M-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \dots & f(1,M-1) \\ \vdots & & & \\ f(N-1,0) & f(N-1,1) & \dots & f(N-1,M-1) \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

Tale matrice rappresenta l'immagine campionata e ogni elemento di essa viene indicato come elemento di immagine ("*picture element*") o *pixel* (talvolta anche semplicemente *pel*).

## 3.3 Quantizzazione e codifica binaria dei campioni dell'immagine

Il campionamento spaziale sopra considerato permette di trasformare l'immagine bianco-nero rappresentata dalla funzione $f(x, y)$ continua, contenente infiniti valori (livelli di grigio), in un insieme finito o discreto (per immagini limitate) di valori $f(n_1, n_2)$ – campioni dell'immagine – come indicato dalla relazione [3.10]. Con il campionamento spaziale viene così interrotta la continuità dei valori nel piano $x-y$ (senza perdita di informazione – è utile ricordare – se il campionamento è effettuato correttamente in accordo con le relazioni [3.5], [3.6] o [3.7], [3.8]).

Per arrivare alla forma numerica compatibile con i sistemi di elaborazione, occorre effettuare altre due operazioni: quantizzazione e codifica binaria.

La quantizzazione consiste nel rappresentare i singoli campioni spaziali $f(n_1, n_2)$ (livelli di grigio) con un numero finito di livelli (valori quantizzati) $1 \leqslant i \leqslant Q$ di ampiezza, essendo i livelli possibili $a_i$ tali che:

$$a_1 \leqslant a_i \leqslant a_Q \qquad [3.11]$$

essendo $a_1$ il valore minimo (generalmente 0) e $a_Q$ il valore massimo dei livelli di grigio.

Si hanno pertanto $Q$ livelli quantizzati, che rappresentano il livello di grigio, essendo l'errore di quantizzazione $\epsilon_q$ (normalizzato all'ampiezza massima) funzione inversa di $Q$:

$$\epsilon_q = \frac{a_Q}{Q}. \qquad [3.12]$$

L'immagine risulta così trasformata in una matrice di numeri interi. Per arrivare a una forma compatibile con i sistemi di elaborazione, occorre rappresentare tali numeri in forma codificata acquisibile dai sistemi stessi. Benché siano note molte forme di codifica dei numeri interi, utilizzando due o tre o più simboli, in genere viene usata la forma binaria con due simboli (bit 0 e 1). Si fa anzi in modo che $Q$ sia una potenza del 2, cioè:

$$Q = 2^m \qquad [3.13]$$

essendo $m$ il numero di simboli binari utilizzati per rappresentare il campo numerico da 1 a $Q$ (o da 0 a $Q-1$). In questo modo i campioni spaziali $f(n_1, n_2)$ divengono gruppi o parole di $m$ simboli binari, essendo il livello discreto o numerico $i$ rappresentato dall'espressione binaria (codifica binaria):

$$i = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k 2^k \qquad [3.14]$$

ove i coefficienti $\alpha_k$ hanno valore binario (0 oppure 1), in modo da mantenere o meno nella sommatoria la potenza del 2 corrispondente per ottenere la rappresentazione esatta del numero intero. Tale rappresentazione corrisponde in effetti a numeri interi che vanno da 0 a $(2^m - 1)$ con $2^m$ valori, come indicato dalla relazione [3.13].

Come già indicato nell'Introduzione, $\epsilon_q$ può essere considerato come un rumore che si sovrappone al livello di grigio $f(n_1, n_2)$ (vedi [I.62]): in pratica l'aggiunta di 1 bit aumenta il rapporto segnale/rumore (S/N) di circa 6 d$B$.

Dalle relazioni precedenti può facilmente dedursi il numero totale di valori binari:

$$n_b = M \times N \times m. \qquad [3.15]$$

Ad esempio, un'immagine con 64 × 64 campioni e rappresentazione a 128 livelli di grigio richiede 524288 bit per la sua identificazione e memorizzazione. La tabella 3.1 riporta il numero di bit necessari per identificare immagini numeriche rappresentate con diversi campionamenti (valore di $N=M$) e diversi livelli di grigio (valore di $m$). Poiché nei sistemi e nei programmi di elaborazione numerica (vedi cap. 11)

Tabella 3.1 Numero di bit per immagini numeriche con diversi valori di $N$ e $m$

| $N$ \ $m$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 32 | 1024 | 2048 | 3072 | 4096 | 5120 | 6144 | 7168 | 8192 |
| 64 | 4096 | 8192 | 12288 | 16384 | 20480 | 24576 | 28672 | 32768 |
| 128 | 16384 | 32768 | 49152 | 65536 | 81920 | 98304 | 114688 | 131072 |
| 256 | 65536 | 131072 | 196608 | 262144 | 327680 | 393216 | 458752 | 524288 |
| 512 | 262144 | 524288 | 786432 | 1048576 | 1310720 | 1572864 | 1835008 | 2097152 |

Tabella 3.2 Numero di byte (parole di 8 bit) per immagini numeriche con diversi valori di $N$ e $m$

| $N$ \ $m$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 32 | 128 | 256 | 512 | 512 | 1024 | 1024 | 1024 | 1024 |
| 64 | 512 | 1024 | 2048 | 2048 | 4096 | 4096 | 4096 | 4096 |
| 128 | 2048 | 4096 | 8192 | 8192 | 16384 | 16384 | 16384 | 16384 |
| 256 | 8192 | 16384 | 32768 | 32768 | 65536 | 65536 | 65536 | 65536 |
| 512 | 32768 | 65536 | 131072 | 131072 | 262144 | 262144 | 262144 | 262144 |

si fa spesso riferimento a blocchi o parole di 8 bit, detti "byte", nella tabella 3.2 è per comodità riportato il numero di byte necessario per le diverse immagini numeriche (più esattamente viene riportato il minimo numero di byte necessario per ogni valore di $N$ e $m$ con separazione fra essi; cioè, per esempio, con $m = 5$ un solo valore di grigio o pixel è contenuto in un byte).

I valori di $N$ e $m$ determinano la precisione o risoluzione di rappresentazione dell'immagine in forma numerica e della sua ricostruzione in forma continua (Gonzalez, Wintz, 1977).

## 3.4 Campionamento e quantizzazione non uniformi

Per ottenere particolari effetti di rappresentazione dell'immagine e successive elaborazioni, si ricorre talvolta a operazioni di campionamento spaziale e quantizzazione dei campioni di tipo non uniforme.

Ad esempio, per un determinato valore di $N$, è possibile mettere in evidenza particolari strutture di un'immagine ricorrendo a un campionamento spaziale adattivo, dipendente appunto dalle strutture dell'immagine. In particolare, in prossimità di zone con rapida variazione dei livelli di grigio nel piano $x-y$ (bordi, contorni ecc.), può convenire usare un campionamento più fitto, con maggior numero di campioni, rispetto a quello usato in zone a piccola variazione dei livelli di grigio stessi. Questa situazione si ha nel caso di volti o figure umane su sfondo piatto o omogeneo (Gon-

zalez, Wintz, 1977). Un problema connesso con l'uso di campionamento non uniforme è rappresentato dal fatto che nelle varie elaborazioni da effettuare sull'immagine numerica occorre identificare chiaramente le zone con diverso campionamento spaziale: ciò può essere ottenuto aggiungendo una parola (con un opportuno numero di bit) di identificazione ai campioni spaziali.

Per quanto riguarda la quantizzazione non uniforme, essa può essere conveniente quando si voglia limitare il numero di bit usati per rappresentare i livelli di grigio. Un criterio di uso della quantizzazione non uniforme può essere quello di impiegare un numero di bit (e corrispondenti livelli di grigio) minore ove si hanno forti variazioni di contrasto (contorni, bordi...) e maggiore ove il contrasto varia poco (per rappresentare adeguatamente queste zone, evitando il sorgere di "falsi contorni" conseguente all'uso di un numero troppo limitato di livelli di grigio). Un altro criterio corrisponde a effettuare la distribuzione di ampiezza dei livelli di grigio nell'immagine in esame e a riservare una quantizzazione più fine nell'intorno dei livelli più frequenti.

## 3.5 Ricostruzione dell'immagine continua dai campioni

Se il campionamento dell'immagine è stato effettuato rispettando le condizioni [3.5] e [3.6] del teorema del campionamento, l'immagine continua può essere riottenuta in modo perfetto, facendo passare i campioni attraverso un filtro ideale passa-basso (fig. 3.3*a*) rettangolare con frequenze di taglio:

$$\omega_{xt} \leqslant \frac{\omega_{xc}}{2} \qquad [3.16]$$

$$\omega_{yt} \leqslant \frac{\omega_{yc}}{2} \qquad [3.17]$$

oppure, nel caso di un unico passo di campionamento $X$ (relazione [3.9]) attraverso un filtro ideale passa-basso a simmetria circolare (fig. 3.3*b*) con frequenza di taglio (tenendo presente che la frequenza di campionamento è $\nu_c = 1/X$):

$$\nu_t \leqslant \frac{1}{2X}, \qquad \omega_t \leqslant \frac{\pi}{X}. \qquad [3.18]$$

Con i filtri passa-basso precedenti si estrae infatti lo spettro $F(\omega_x, \omega_y)$ dell'immagine originaria $f(x, y)$, eliminando tutti gli spettri ripetuti secondo le direzioni delle frequenze spaziali angolari $\omega_x$ e $\omega_y$ (fig. 3.2).

Un filtro bidimensionale rettangolare con frequenze di taglio $\omega_{xt}$ e $\omega_{yt}$ espresse dalle relazioni [3.16] e [3.17] può essere specificato dalla sua funzione di trasferimento del tipo:

$$H_r(\omega_x, \omega_y) = 1 \quad \text{per} \quad |\omega_x| \leqslant \omega_{xt} \quad \text{e} \quad |\omega_y| \leqslant \omega_{yt} \qquad [3.19]$$

$$H_r(\omega_x, \omega_y) = 0 \quad \text{altrove.} \qquad [3.20]$$

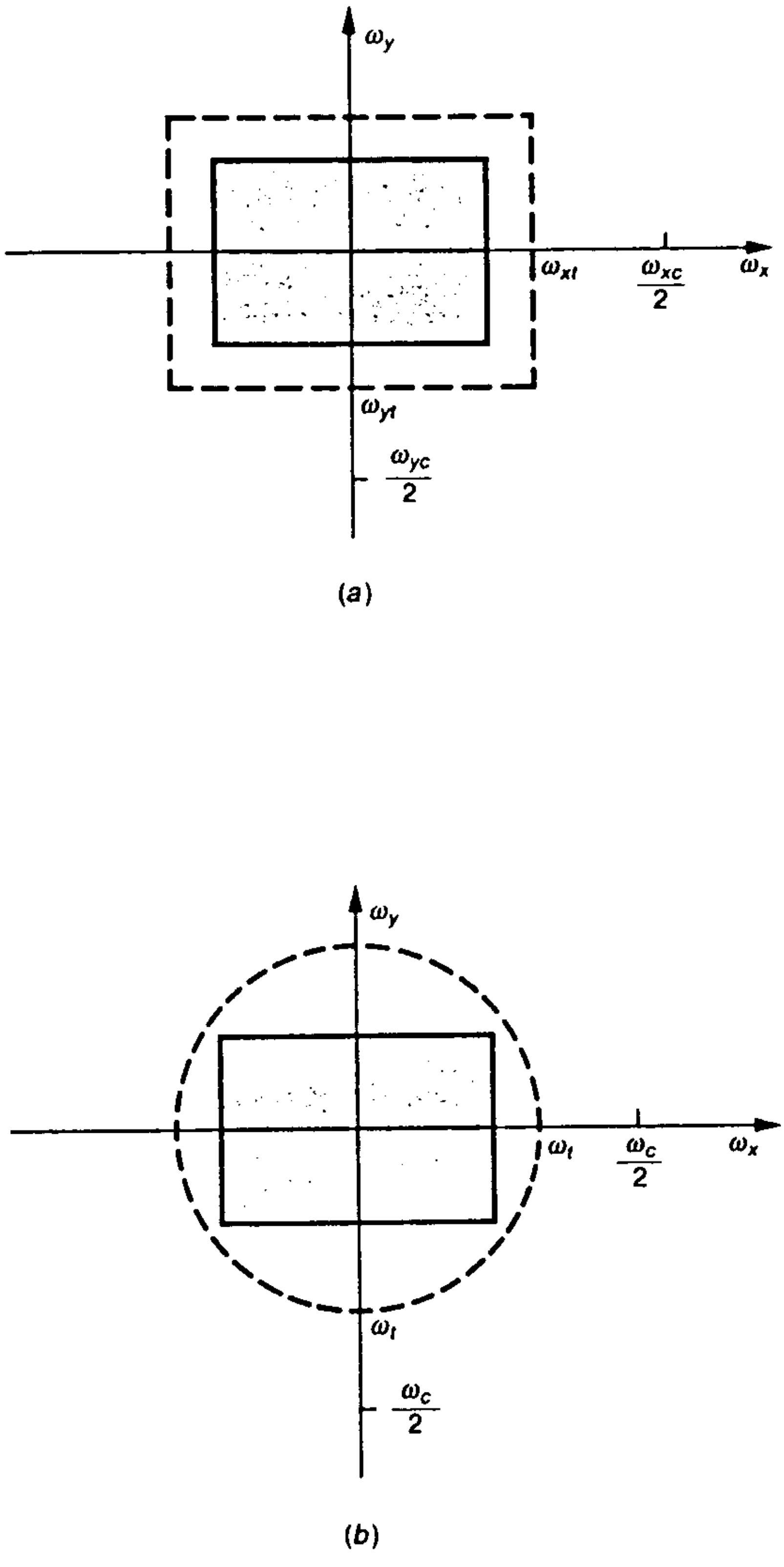



**Figura 3.3**
(*a*) Filtro passa-basso 2D rettangolare (sono tratteggiate le frequenze di taglio) di ricostruzione dell'immagine continua dai campioni (il rettangolo interno a tratto continuo indica l'estensione dello spettro dell'immagine); (*b*) filtro passa-basso 2D a simmetria circolare (è tratteggiata la frequenza di taglio) di ricostruzione dell'immagine continua dai campioni.

La sua risposta impulsiva $h_r(x,y)$ risulta (Pratt, 1978):

$$h_r(x,y)=\frac{\omega_{xt}\,\omega_{yt}}{\pi^2}\cdot\frac{\sin(\omega_{xt}x)}{(\omega_{xt}x)}\cdot\frac{\sin(\omega_{yt}y)}{(\omega_{yt}y)}. \qquad [3.21]$$

Un filtro bidimensionale a simmetria circolare, con frequenza di taglio $\nu_t$ espressa dalla relazione [3.18], può essere specificato dalla sua funzione di trasferimento:

$$\begin{aligned} H_c(\omega_x,\omega_y)&=1 \quad \text{per} \quad \sqrt{\omega_x^2+\omega_y^2}\leqslant\omega_t \\ H_c(\omega_x,\omega_y)&=0 \quad \text{altrove.} \end{aligned} \qquad [3.22]$$

La sua risposta impulsiva $h_c(x,y)$ risulta:

$$h_c(x,y)=2\pi\omega_t\frac{J_1\{\omega_t\sqrt{x^2+y^2}\}}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad [3.23]$$

ove $J_1$ è una funzione di Bessel di prima specie.

Come è stato già osservato, si ottiene lo spettro dell'immagine continua ricostruita $F_R(\omega_x,\omega_y)$ moltiplicando lo spettro dell'immagine campionata $F_c(\omega_x,\omega_y)$ (relazione [3.4]) per la funzione di trasferimento del filtro passa-basso di ricostruzione $H(\omega_x,\omega_y)$, ad esempio del tipo $H_r(\omega_x,\omega_y)$ o $H_c(\omega_x,\omega_y)$; cioè:

$$\begin{aligned} F_R(\omega_x,\omega_y)&=F_c(\omega_x,\omega_y)H(\omega_x,\omega_y)= \\ &=\frac{1}{\Delta x\,\Delta y}H(\omega_x,\omega_y)\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}F(\omega_x-n_1\omega_{xc},\omega_y-n_2\omega_{yc}). \end{aligned} \qquad [3.24]$$

L'immagine continua ricostruita $f_R(x,y)$ è pertanto ottenuta come convoluzione (vedi [1.27]) fra la $f_c(x,y)$ e la $h(x,y)$:

$$f_R(x,y)=f_c(x,y)\circledast h(x,y). \qquad [3.25]$$

Sostituendo alla $f_c(x,y)$ l'espressione [3.2] ed effettuando la convoluzione, la [3.25] diviene:

$$f_R(x,y)=\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}f(n_1\Delta x,n_2\Delta y)h(x-n_1\Delta x,y-n_2\Delta y). \qquad [3.26]$$

Questa relazione mostra che la risposta impulsiva $h(x,y)$ del filtro di ricostruzione opera come una funzione di interpolazione bidimensionale sui campioni spaziali dell'immagine.

Come già osservato, se il campionamento è effettuato correttamente (relazioni [3.5] e [3.6]) e il filtro di ricostruzione o interpolazione del tipo passa-basso è definito con frequenze di taglio opportune (relazioni [3.16] e [3.17] oppure [3.18], rispettivamente per filtro rettangolare o con simmetria circolare), lo spettro dell'im-

magine ricostruita $F_R(\omega_x, \omega_y)$ coincide con lo spettro dell'immagine originaria $F(\omega_x, \omega_y)$ (relazione [3.24]) e l'immagine ricostruita $f_R(x, y)$ coincide con l'immagine stessa originaria (relazione [3.26]).

E' da notare però che, anche se esistono molti filtri di ricostruzione oltre a quello rettangolare e circolare descritti sopra, in pratica non è facile ottenere ricostruzioni continue perfette, essenzialmente per due tipi di errore di ricostruzione (Pratt, 1978):

– approssimazione della funzione di ricostruzione o interpolazione ideale $h(x, y)$ con una funzione di interpolazione praticamente impiegata $h_p(x, y)$;[1]

– troncamento della serie di interpolazione [3.26] facendo in pratica uso solo di un numero finito di funzioni di interpolazione.

## 3.6 Sistemi di campionamento usati in pratica

In pratica il campionamento di un'immagine di dimensione finita avviene mediante impulsi di campionamento di estensione spaziale finita (e non infinitesima, come precedentemente considerato mediante operatori di Dirac) e può essere usato un passo di campionamento spaziale superiore a quello minimo richiesto dal teorema del campionamento.

La figura 3.4 mostra uno schema di principio di un sistema di campionamento: un sottile fascio di luce è spostato opportunamente su una trasparenza positiva dell'immagine in esame (processo di scansione). La luce che passa attraverso la trasparenza è raccolta da una lente (condensatore) e concentrata sulla superficie di un fotoelemento rivelatore (fotorivelatore). L'uscita del fotorivelatore è integrata nell'intervallo di tempo durante il quale il fascio di luce esplora una cella elementare dell'immagine (pixel).

L'immagine campionata può essere espressa con una relazione analoga alla [3.2] del tipo:

$$f_{cp}(x,y)=f(x,y)c_p(x,y) \qquad [3.27]$$

ove $c_p(x, y)$ è la funzione di campionamento pratica, costituita da impulsi $i(x, y)$ di estensione finita (pari a quella della cella elementare di scansione), esprimibile nel modo seguente:

$$c_p(x,y)=\sum_{n_1=-N_1}^{N_1}\sum_{n_2=-N_2}^{N_2} i(x-n_1\Delta x, y-n_2\Delta y) \qquad [3.28]$$

in un campo piano finito di dimensioni $(2N_1+1)(2N_2+1)$.

[1] E' da notare peraltro che, utilizzando funzioni di interpolazione fisiche (con sistemi ottici, ad esempio), esse non possono assumere i valori negativi (presenti nelle relazioni [3.21] [3.23] e analoghe), in quanto una funzione o immagine ottica può assumere solo valori di ampiezza positivi (vedi § 1.1).

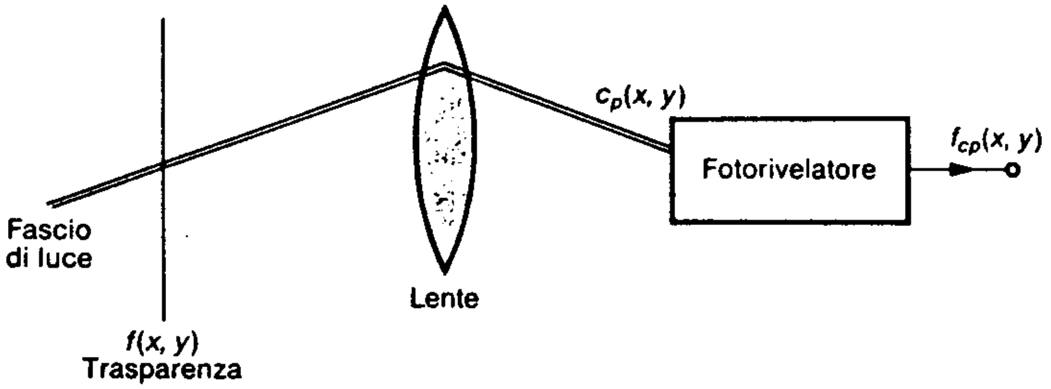



**Figura 3.4**
Schema di principio di un sistema di campionamento con processo di scansione.

Si può mostrare (Pratt, 1978) che, per immagini campionate correttamente (relazioni [3.5] e [3.6]), il campionamento con impulsi di estensione finita rappresenta una degradazione spaziale lineare (filtro passa-basso del tipo sfuocamento). Peraltro, nel caso di campionamento con passo superiore a quello minimo (condizione di "*aliasing*") il campionamento con impulsi di estensione finita dà un effetto positivo, in quanto, equivalendo a un filtraggio passa-basso, limita l'estensione nelle frequenze spaziali dello spettro dell'immagine originaria, riducendo quindi l'effetto di "*aliasing*".

Passando a considerare proprio il passo di campionamento $X$ (o frequenza di campionamento $\nu_c = 1/X$) usato in pratica nel sistema di campionamento schematizzato in figura 3.4, se questo passo $X$ non soddisfa la relazione [3.9], nel senso che è maggiore del limite fissato dal teorema del campionamento, nasce appunto il fenomeno di "*aliasing*" sopra ricordato e illustrato in figura 3.5. Le zone tratteggiate nella figura (zone in "*aliasing*", cioè con sovrapposizione degli spettri) sono "perdute" o irrecuperabili nelle successive elaborazioni, in quanto un filtro passa-basso dei tipi considerati nel paragrafo 3.5 non è in grado di estrarre lo spettro dell'immagine originaria e quindi di fare riottenere l'immagine stessa continua. Le vie per ridurre l'effetto di "*aliasing*" sono praticamente due.

(1) Filtraggio passa-basso prima dell'operazione di campionamento (filtro di precampionamento), che, in accordo alla figura 3.6, effettua un'opportuna riduzione o eliminazione delle frequenze spaziali elevate contenute nell'immagine originaria (ad esempio, linea tratteggiata circolare in fig. 3.5 con uso di un filtro a simmetria circolare). In pratica questo può essere ottenuto in modo semplice inviando l'immagine attraverso un sistema ottico con lenti di apertura limitata o controllando il grado di sfuocamento delle lenti stesse. Si può mostrare (Pratt, 1978) che per lenti di diffrazione circolari di diametro $d$ e con distanza $L_f$ fra le lenti e il piano focale, la funzione di trasferimento è del tipo:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{2}{\pi}\left[\cos^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \frac{\omega}{\omega_0}\sqrt{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right] && \text{per} \quad 0 \leqslant |\omega| \leqslant \omega_0 \\ H(\omega) &= 0 && \text{per} \quad |\omega| > \omega_0 \end{aligned} \qquad [3.29]$$

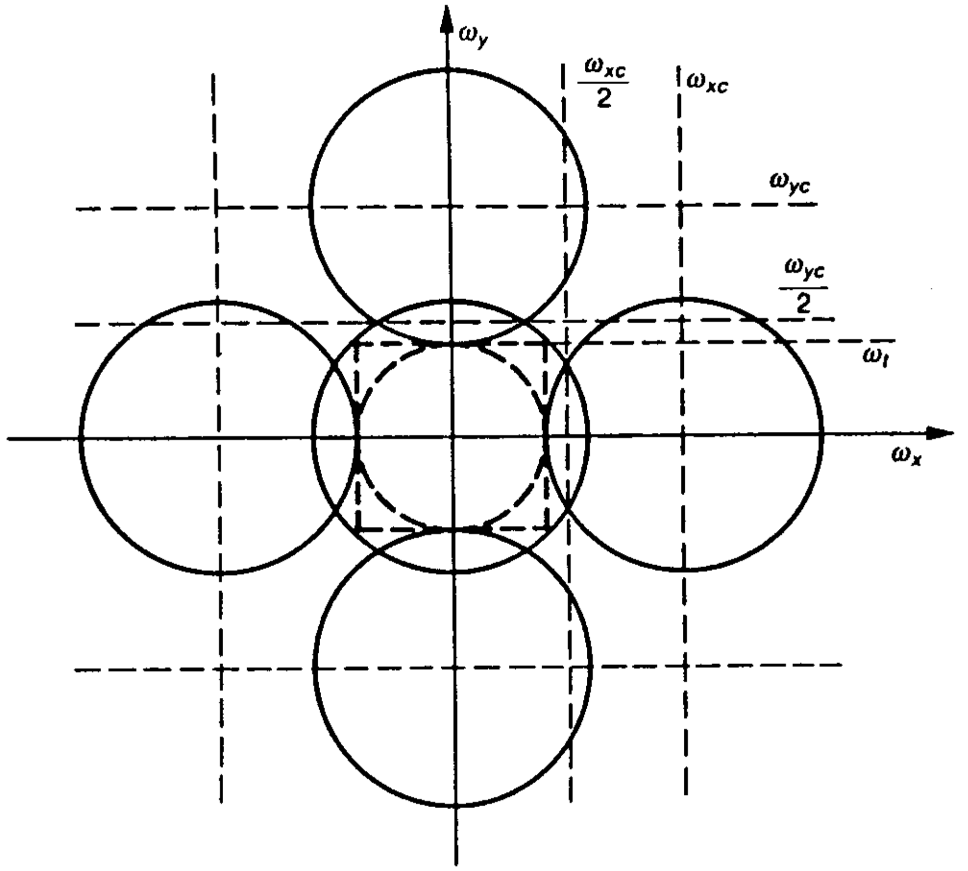



**Figura 3.5**
Esempio di campionamento dell'immagine originaria con passo di campionamento $X$ maggiore del limite fissato dal teorema del campionamento: gli spettri ripetuti a distanza $\omega_{xc}$ e $\omega_{yc}$ si sovrappongono (fenomeno di "*aliasing*") nelle zone tratteggiate a tratto continuo, che risultano perdute per le successive elaborazioni ($\omega_{xc} = \omega_{yc} = 2\pi/X$).

ove $\omega_0 = (\pi d)/L_f$. La figura 3.7 mostra l'andamento della $H(\omega)$ in funzione di $\omega/(2\omega_0)$ per diversi gradi di sfuocamento.

(2) Campionamento con un'estensione finita degli impulsi di campionamento, come già sopra osservato. Usando impulsi di campionamento di forma rettangolare,

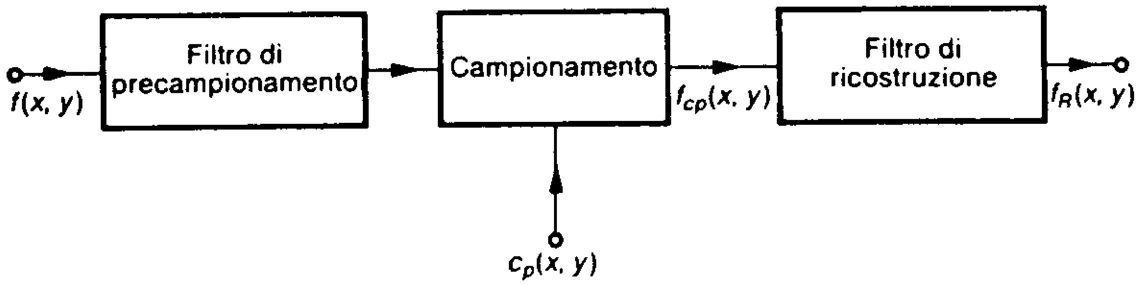



**Figura 3.6**
Uso di un filtro di pre-campionamento di tipo passa-basso per ridurre il fenomeno di "*aliasing*".

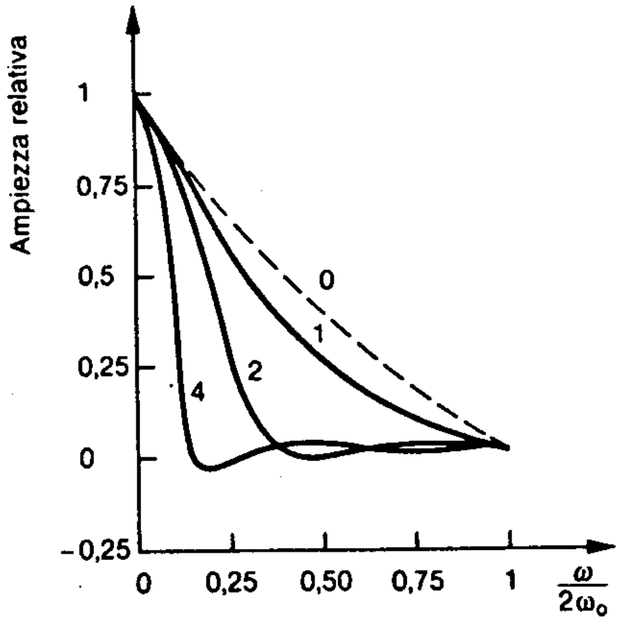



Figura 3.7
Funzione di trasferimento di un sistema ottico con lenti di diametro $d$ e con distanza $L_f$ fra le lenti e il piano focale, con $\omega_0 = (\pi d)/L_f$, per diversi gradi di sfuocamento (curve 0-4).

cioè definiti dalla relazione:

$$i(x,y) = \begin{cases} 1/(D^2) & \text{per} \quad |x,y| \leqslant D/2 \\ 0 & \text{per} \quad |x,y| > D/2 \end{cases} \qquad [3.30]$$

(quali ad esempio ottenuti da un sistema di scansione ottico con luce incoerente del tipo microdensitometro) si ha una funzione di trasferimento data da:

$$I(\omega_x, \omega_y) = \frac{\sin[(\omega_x D)/2]}{(\omega_x D)/2} \cdot \frac{\sin[(\omega_y D)/2]}{(\omega_y D)/2} \qquad [3.31]$$

mentre, utilizzando una scansione con tubo a raggi catodici, si ha una forma degli impulsi del tipo gaussiano:

$$i(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_w^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma_w^2}} \qquad [3.32]$$

ove $\sigma_w$ è la misura della dispersione del fascetto elettronico a cui corrisponde la funzione di trasferimento

$$I(\omega_x, \omega_y) = e^{-\frac{(\omega_x^2+\omega_y^2)\sigma_w^2}{2}}. \qquad [3.33]$$

Da un'analisi comparativa dei precedenti sistemi, si può dedurre che, mentre il campionamento con impulsi rettangolari e con raggi catodici è pressoché equivalente,

l'uso di un sistema ottico di prefiltraggio passa-basso dà luogo a una perdita di risoluzione spaziale maggiore e lo sfuocamento del sistema ottico stesso determina una perdita ancora maggiore (Pratt, 1978). Tale perdita di risoluzione può essere rappresentata con un rumore equivalente, che va aggiunto al rumore di quantizzazione (vedi [1.62]).

## 3.7 Sistemi di ricostruzione usati in pratica

Come indicato nel paragrafo 3.5, un sistema di ricostruzione ideale dovrebbe utilizzare un filtro passa-basso ideale (fig. 3.3) o l'interpolazione perfetta con funzioni del tipo sinc che usano un numero infinito di termini.

In pratica la figura 3.8 mostra un sistema di ricostruzione tipico, che utilizza un fascetto sottile di elettroni che viene spostato, secondo una griglia rettangolare, sullo schermo di un tubo a raggi catodici (TRC), producendo punti o macchie luminose di intensità proporzionale al valore dei campioni spaziali dell'immagine originaria. L'immagine ottenuta sullo schermo può poi essere focalizzata su uno schermo trasparente (di vetro) per visione immediata o su una pellicola fotografica per registrazione e successiva utilizzazione mediante un opportuno sistema ottico.

In sostanza con il sistema precedente o con sistemi analoghi (ad esempio del tipo microdensitometro) si ricrea una matrice, nella quale ogni singola cella (quadrata o circolare) rappresenta, con la sua intensità di grigio, il valore del campione spaziale dell'immagine nella posizione corrispondente (fig. 3.8).

Per migliorare la ricostruzione dell'immagine in forma continua, occorre usare opportuni accorgimenti nella disposizione delle celle elementari (pixel) o impiegare funzioni di interpolazione.

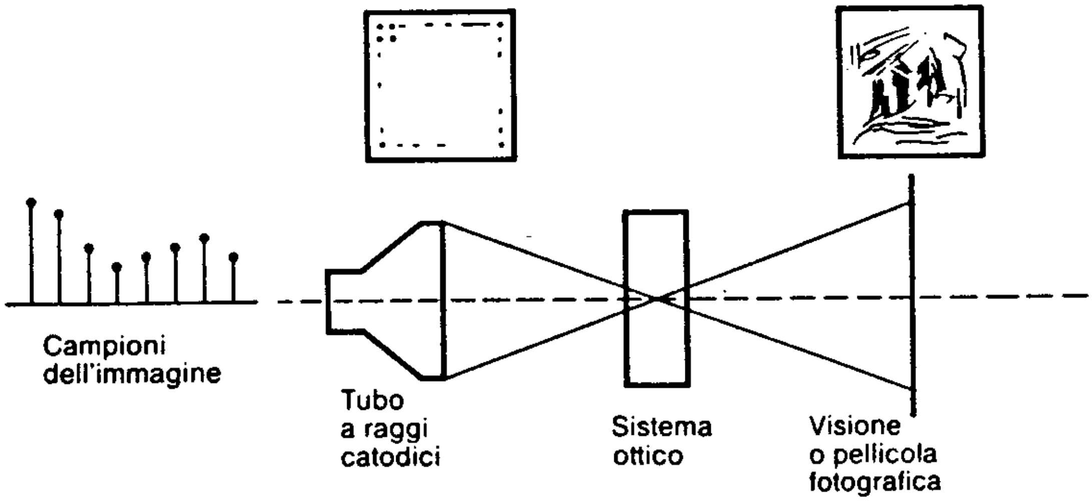



**Figura 3.8**
Schema di principio di un sistema di ricostruzione dell'immagine continua dai campioni, che utilizza un tubo a raggi catodici (TRC) e un sistema ottico con visione diretta dell'immagine ricostruita o sua registrazione su pellicola fotografica.

Fra gli accorgimenti semplici utilizzati in pratica, si può ricordare quello consistente nella parziale sovrapposizione delle celle elementari, in modo da ridurre le discontinuità brusche del passaggio dal livello di grigio di una cella a quello delle altre adiacenti.

La tecnica però più usata, che corrisponde all'approssimazione pratica di quanto richiesto in teoria per una ricostruzione perfetta, consiste senz'altro nell'uso di funzioni di interpolazione opportune. In figura 3.9 sono indicate diverse funzioni di interpolazione unidimensionali (1D) di complessità crescente, dalla funzione rettangolare più semplice a quella esatta del tipo $\sin x/x$. In tabella 3.3 sono riportate le espressioni matematiche delle corrispondenti funzioni bidimensionali $i(x, y)$ e loro trasformate di Fourier $I(\omega_x, \omega_y)$. Nella stessa tabella 3.3 sono riportati, a titolo indicativo, gli errori di interpolazione (percentuali) essendo l'errore $\epsilon_i$ definito come la parte di energia dell'immagine interpolata che resta al di fuori del limite di Nyquist (frequenza spaziale $\nu_c/2$) per un andamento tipico di densità spettrale dell'immagine del tipo (Pratt, 1978):

$$
\begin{aligned}
P_f(\omega) &= \sqrt{\left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2 - \omega^2} \qquad \text{per} \quad \omega^2 \leq \left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2 \\
P_f(\omega) &= 0 \qquad \text{per} \quad \omega^2 > \left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2 .
\end{aligned}
\qquad [3.34]
$$

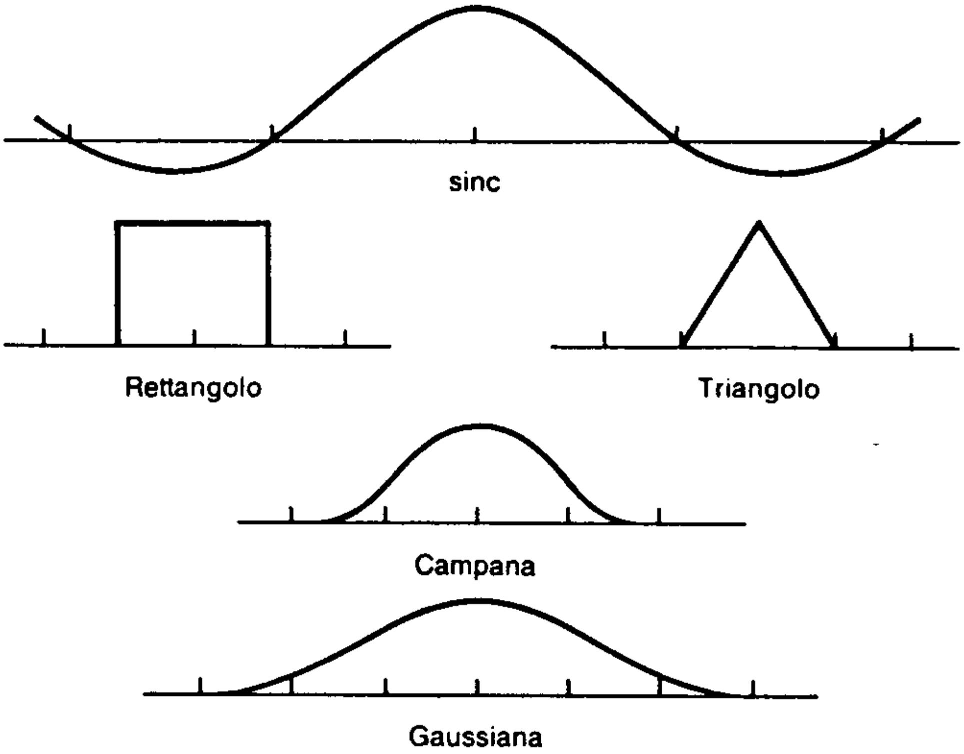



**Figura 3.9**
**Alcune funzioni di interpolazione unidimensionali $i(x)$ del tipo sinc, rettangolo, triangolo, campana e gaussiana.**

**Tabella 3.3** Funzioni di interpolazione bidimensionali

| Funzione | Definizione nel dominio spaziale e frequenziale | $\epsilon_i(\%)$ |
|---|---|---|
| sinc separabile | $i_s(x, y) = \frac{4}{D_x D_y} \frac{\sin[(2\pi x)/D_x]}{(2\pi x)/D_x} \frac{\sin[(2\pi y)/D_y]}{(2\pi y)/D_y}$<br>$D_x = \frac{2\pi}{\omega_{xc}}$<br>$D_y = \frac{2\pi}{\omega_{yc}}$<br>$I_s(\omega_x, \omega_y) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad \lvert\omega_x\rvert < \omega_{xc}, \ \lvert\omega_y\rvert < \omega_{yc} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ | 0 |
| rettangolo separabile | $i_r(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{D_x D_y} & \text{per} \quad \lvert x\rvert < D_x/2, \ \lvert y\rvert < D_y/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$<br>$I_r(\omega_x, \omega_y) = \frac{\sin[(\omega_x D_x)/2]}{(\omega_x D_x)/2} \frac{\sin[(\omega_y D_y)/2]}{(\omega_y D_y)/2}$ | 15,7 |
| triangolo separabile | $i_t(x, y) = i_r(x, y) \circledast i_r(x, y)$<br>$I_t(\omega_x, \omega_y) = I_r^2(\omega_x, \omega_y)$ | 3,7 |
| campana separabile | $i_c(x, y) = i_r(x, y) \circledast i_t(x, y)$<br>$I_c(\omega_x, \omega_y) = I_r^3(\omega_x, \omega_y)$ | 1,1 |
| gaussiana | $i_g(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_w^2} e^{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma_w^2}}$<br>$I_g(\omega_x, \omega_y) = e^{-\frac{\sigma_w^2(\omega_x^2 + \omega_y^2)}{2}}$ | 2<br>$\left(\text{per } \sigma_w = \frac{D}{2}\right)$ |

Diversi esempi di campionamento e ricostruzione di immagini con alcuni sistemi di acquisizione e di elaborazione delle immagini che utilizzano le tecniche precedenti sono mostrati nel capitolo 6 e seguenti. In tali capitoli sono riportati anche esempi di ricostruzione e presentazione delle immagini da forma numerica con due o pochi livelli di grigio: con due livelli (bianco-nero), usando quadrati o cerchi elementari di area proporzionale al valore del campione dell'immagine, o inserendo in una cella elementare un numero di punti proporzionale al valore stesso; con pochi livelli, usando la sovrapposizione di caratteri alfanumerici (arrivando a 10÷16 livelli effettivi di grigio). Queste tecniche sono in genere utilizzate – come gli esempi confermano – in particolare per presentare le immagini in forma economica su stampanti o su registratori a carta o su "plotter" (Stucki, 1981).

## 3.8 Campionamento, conversione in forma numerica e ricostruzione di immagini a colori

I metodi e le tecniche descritte per le immagini in bianco e nero si estendono facilmente alle immagini a colori. Tenendo conto di quanto indicato nel capitolo 2 sulla rappresentazione dell'immagine a colori mediante tre sottoimmagini nei colori primari (rosso, verde e blu), il campionamento e conversione in forma numerica dell'immagine a colori avviene effettuando il campionamento e conversione in forma numerica delle tre sottoimmagini, usando uno stesso riferimento nel piano $(x, y)$ per il campionamento e uno stesso passo di campionamento $X$ (frequenza di campionamento $\nu_c = 1/X$) e un uguale passo di quantizzazione dei tre livelli del rosso, verde e blu (in definitiva, per un'immagine a colori di dimensioni $(a, b)$, lo stesso valore di $N$ e di $m$; vedi § 3.3).

Anche la ricostruzione dell'immagine continua a colori dalle tre immagini numeriche può essere effettuata con le stesse operazioni di ricostruzione (o interpolazione) descritte per una singola immagine in bianco e nero. Occorre naturalmente utilizzare accuratamente i riferimenti spaziali sopra indicati, uguali per le tre sottoimmagini, al fine di ricomporre in una cella spaziale elementare (pixel) le tre componenti continue del rosso, verde e blu corrispondenti allo stesso punto cromatico dell'immagine a colori originaria.

## Riferimenti bibliografici

Atzeni C., Cappellini V., *Elementi di teoria delle comunicazioni* (G. & G. Editrice, Firenze 1972).
Gonzalez R. C., Wintz P., *Digital Image Processing* (Addison-Wesley, Londra e Sydney 1977).
Pratt W. K., *Digital Image Processing* (Wiley, New York 1978).
Stucki P., *Image Processing for Document Reproduction*, in "Atti del Convegno Elaborazione del Colore" (IBM Italia, Roma 1981).

# Capitolo 4

# Caratterizzazione matematica e analisi delle immagini convertite in forma numerica e dei sistemi numerici

## 4.1 Introduzione

Nel capitolo precedente sono state descritte le operazioni di conversione in forma numerica delle immagini continue (campionamento spaziale, quantizzazione, codifica binaria).

In questo capitolo viene presentata la caratterizzazione matematica delle immagini convertite in forma numerica, in particolare mediante la trasformata $z$ bidimensionale. Sono anche descritte le proprietà principali degli operatori e dei sistemi numerici bidimensionali, definite nel dominio delle variabili $z$ e delle frequenze spaziali.

Viene anche definito il concetto di stabilità dei sistemi bidimensionali a dati campionati o numerici, considerando le relative condizioni di stabilità.

## 4.2 Trasformata $z$ bidimensionale

Data un'immagine campionata (del tipo indicato dalla [3.10]) o più in generale una sequenza bidimensionale (2D) di dati $f(n_1, n_2)$, la sua trasformata $z$ 2D è definita nella forma più generale dalla seguente relazione (Cappellini, Constantinides, Emiliani, 1978):

$$Z\{f(n_1, n_2)\} = F(z_1, z_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} f(n_1, n_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2} \qquad [4.1]$$

ove $z_1$ e $z_2$ sono variabili complesse, collegate alle variabili di Laplace $p_1, p_2$ e ai passi di campionamento spaziale $\Delta x$, $\Delta y$ (relazioni [3.5] e [3.6]) dalle seguenti espressioni:

$$z_1 = e^{p_1 \Delta x} = e^{(\sigma_1 + j\omega_x)\Delta x} \qquad [4.2]$$

$$z_2 = e^{p_2 \Delta y} = e^{(\sigma_2 + j\omega_y)\Delta y} \qquad [4.3]$$

essendo $\sigma_1$ e $\sigma_2$ le parti reali e $j\omega_x$ e $j\omega_y$ le parti immaginarie delle variabili di Laplace $p_1$ e $p_2$.

Nel caso (cui faremo riferimento nel seguito) di unico passo di campionamento $X$ (relazione [3.9]), le espressioni [4.2] e [4.3] divengono:

$$z_1 = e^{p_1 X} = e^{(\sigma_1 + j\omega_x)X} \qquad [4.4]$$

$$z_2 = e^{p_2 X} = e^{(\sigma_2 + j\omega_y)X}. \qquad [4.5]$$

La trasformata $z$ bidimensionale (2D) inversa è definita dalla seguente relazione:

$$f(n_1, n_2) = \left(\frac{1}{2\pi j}\right)^2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} F(z_1, z_2) z_1^{n_1 - 1} z_2^{n_2 - 1} \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2 \qquad [4.6]$$

ove $C_1$ e $C_2$ sono due contorni chiusi intorno all'origine entro la regione di convergenza (Cappellini, Constantinides, Emiliani, 1978). E' da osservare che, a differenza dalla trasformata $z$ unidimensionale (1D), è in genere assai difficile determinare la regione di convergenza[1] di $F(z_1, z_2)$ e di conseguenza anche i contorni di integrazione $C_1$ e $C_2$ (Oppenheim, Schafer, 1975).

## 4.3 Proprietà della trasformata $z$ bidimensionale

Descriviamo di seguito alcune delle più importanti proprietà della trasformata $z$ bidimensionale.

*Linearità*

L'operatore $Z$, che associa alla sequenza bidimensionale $f(n_1, n_2)$ la sua trasformata $z$, è lineare; si ha cioè la proprietà:

$$Z\{af(n_1, n_2) + bg(n_1, n_2)\} = aZ\{f(n_1, n_2)\} + bZ\{g(n_1, n_2)\} = \\ = aF(z_1, z_2) + bG(z_1, z_2) \qquad [4.7]$$

per cui vale il principio di sovrapposizione.

*Separabilità*

Se la sequenza 2D $f(n_1, n_2)$ è separabile in due sequenze 1D $f_1(n_1)$ e $f_2(n_2)$ nel dominio spaziale, cioè:

$$f(n_1, n_2) = f_1(n_1) f_2(n_2), \qquad [4.8]$$

[1] Per la convergenza della trasformata $z$ 2D dev'essere: $\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} |f(n_1, n_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2}| < \infty$.

è separabile anche la sua trasformata $z$ 2D:

$$F(z_1, z_2) = F_1(z_1) F_2(z_2), \qquad [4.9]$$

essendo $F_1(z_1)$ e $F_2(z_2)$ le trasformate $z$ 1D rispettivamente di $f_1(n_1)$ e $f_2(n_2)$.

*Traslazione o variazione di posizione*

Una traslazione o variazione di posizione nella sequenza $f(n_1, n_2)$ (spostamento dei campioni dell'immagine considerata) del tipo $f(n_1 - m_1, n_2 - m_2)$ dà luogo alla seguente trasformata $z$ 2D:

$$Z\{f(n_1 - m_1, n_2 - m_2)\} = z_1^{-m_1} z_2^{-m_2} F(z_1, z_2). \qquad [4.10]$$

*Convoluzione discreta*

Consideriamo una sequenza 2D $g(n_1, n_2)$, ottenuta dalla seguente relazione che contiene le due sequenze 2D $f(n_1, n_2)$ e $h(n_1, n_2)$:

$$g(n_1, n_2) = \sum_{k_1 = -\infty}^{\infty} \sum_{k_2 = -\infty}^{\infty} h(k_1, k_2) f(n_1 - k_1, n_2 - k_2). \qquad [4.11]$$

Si può mostrare (Oppenheim, Schafer, 1976) che la trasformata $z$ della sequenza $g(n_1, n_2)$ è espressa da:

$$G(z_1, z_2) = H(z_1, z_2) F(z_1, z_2) \qquad [4.12]$$

cioè risulta il prodotto delle trasformate delle due sequenze $f(n_1, n_2)$ e $h(n_1, n_2)$.

Altre proprietà della trasformata $z$ 2D sono riportate nella tabella 4.1. Si nota l'analogia con le proprietà della trasformata di Fourier 2D (vedi § 1.3). Tale analogia risulta ancora più evidente, se si esprimono $z_1$ e $z_2$ in funzione delle variabili di Laplace (relazioni [4.4] e [4.5]), ponendo uguali a zero le parti reali $\sigma_1$ e $\sigma_2$, cioè:

$$z_1 = e^{j\omega_x X} \qquad [4.13]$$

$$z_2 = e^{j\omega_y X} \qquad [4.14]$$

spostandosi nei piani $z_1$ e $z_2$ sui cerchi unitari.

Le posizioni [4.13] e [4.14] sono in effetti di grande utilità per interpretare fisicamente le operazioni con le trasformate $z$: esse, infatti, mettono in evidenza le due frequenze angolari spaziali $\omega_x$ e $\omega_y$ (e frequenze spaziali $\nu_x$ e $\nu_y$) e il passo di campionamento $X$ applicato all'immagine continua.

Per maggiore semplicità formale, nel seguito si farà riferimento alle frequenze spaziali normalizzate $\omega_x/\omega_c$ e $\omega_y/\omega_c$, che corrisponde a considerare $X = 1$ (infatti $\nu_c = 1/X$); in questo modo la pulsazione di campionamento $\omega_c$ risulta semplicemente:

$$\omega_c = 2\pi\nu_c = 2\pi/X = 2\pi \qquad [4.15]$$

e a multipli di $\omega_c$ corrisponderanno multipli di $2\pi$.

Tabella 4.1 Alcune trasformate $z$ 2D e loro proprietà principali

| Sequenza 2D | Trasformata z 2D |
|---|---|
| $f(n_1, n_2)$ | $F(z_1, z_2)$ |
| $g(n_1, n_2)$ | $G(z_1, z_2)$ |
| $af(n_1, n_2) + bg(n_1, n_2)$ | $aF(z_1, z_2) + bG(z_1, z_2)$ |
| $f(n_1 - m_1, n_2 - m_2)$ | $z_1^{-m_1} z_2^{-m_2} F(z_1, z_2)$ |
| $a^{n_1} b^{n_2} f(n_1, n_2)$ | $F(a^{-1} z_1, b^{-1} z_2)$ |
| $n_1 n_2 f(n_1, n_2)$ | $z_1 z_2 \dfrac{d^2 F(z_1, z_2)}{dz_1 dz_2}$ |
| $f^*(n_1, n_2)$ | $F^*(z_1^*, z_2^*)$ |
| $f(-n_1, -n_2)$ | $F(z_1^{-1}, z_2^{-1})$ |
| $\mathrm{Re}[f(n_1, n_2)]$ | $\dfrac{1}{2}[F(z_1, z_2) + F^*(z_1^*, z_2^*)]$ |
| $\mathrm{Im}[f(n_1, n_2)]$ | $\dfrac{1}{2}[F(z_1, z_2) - F^*(z_1^*, z_2^*)]$ |
| $f(n_1, n_2) \circledast g(n_1, n_2)$ | $F(z_1, z_2)\, G(z_1, z_2)$ |
| $f(n_1, n_2) g(n_1, n_2)$ | $\left(\dfrac{1}{2\pi j}\right) \oint_{C_1} \oint_{C_2} F\left(\dfrac{z_1}{\nu_1}, \dfrac{z_2}{\nu_2}\right) G(\nu_1, \nu_2) \nu_1^{-1} \nu_2^{-1} d\nu_1 d\nu_2$ |

Le relazioni [4.13] e [4.14] divengono più semplicemente

$$z_1 = e^{j\omega_x} \qquad [4.16]$$

$$z_2 = e^{j\omega_y}. \qquad [4.17]$$

Quando si vuole tornare alla scala assoluta delle frequenze, basta inserire nuovamente il passo di campionamento effettivo $X$ (o frequenza di campionamento $\nu_c$).

## 4.4 Sistemi a dati campionati o numerici bidimensionali

Un sistema bidimensionale (2D) a dati campionati, discreto o numerico (il termine numerico si riferisce al caso in cui i dati campionati o discreti sono espressi in forma numerica) è, nella sua forma più generale, definito da un operatore $T_C\{\cdot\}$, che fa corrispondere, a una sequenza 2D (immagine campionata) d'ingresso $f(n_1, n_2)$, una sequenza 2D (immagine campionata) di uscita $g(n_1, n_2)$, cioè (Cappellini, Constantinides, Emiliani, 1978):

$$g(n_1, n_2) = T_C\{f(n_1, n_2)\}\,. \qquad [4.18]$$

Un sistema 2D discreto è detto lineare additivo (o semplicemente lineare) se per

esso vale la legge di sovrapposizione degli effetti, cioè:

$$T_C\{a_1f_1(n_1,n_2)+a_2f_2(n_1,n_2)+\cdots+a_nf_n(n_1,n_2)\}=$$
$$=a_1T_C\{f_1(n_1,n_2)\}+a_2T_C\{f_2(n_1,n_2)\}+\cdots+$$
$$+a_nT_C\{f_n(n_1,n_2)\} \qquad [4.19]$$

dove $a_1, a_2, ..., a_n$ sono costanti reali o complesse.

In analogia a quanto considerato per i sistemi 2D continui (§ 1.4), si possono definire sistemi 2D discreti spazialmente invarianti, cioè tali che alla sequenza di ingresso $f(n_1-k_1, n_2-k_2)$ corrisponde in uscita la sequenza $g(n_1-k_1, n_2-k_2)$ e per i quali la sequenza di uscita è indipendente dalla posizione della sequenza di ingresso.

Considerando ora, in analogia con il caso continuo, l'operatore di Dirac discreto o impulso unitario $\delta(n_1,n_2)$, definito dalle relazioni:

$$\begin{aligned}&\delta(n_1,n_2)=1 \quad \text{per} \quad n_1=0, n_2=0\\&\delta(n_1,n_2)=0 \quad \text{altrove,}\end{aligned} \qquad [4.20]$$

indichiamo con $h(n_1, n_2)$ l'uscita del sistema 2D discreto quando in ingresso è presentato $\delta(n_1, n_2)$. La sequenza $h(n_1, n_2)$ si chiama, in analogia con il caso continuo (relazioni [1.48] e [1.50]), risposta impulsiva discreta.

Considerando un sistema 2D discreto lineare spazialmente invariante, si può ottenere l'uscita $g(n_1, n_2)$, mediante il principio di sovrapposizione, con la seguente relazione:

$$g(n_1,n_2)=T_C\{\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}f(k_1,k_2)\delta(k_1-n_1,k_2-n_2)\}=$$
$$=\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}f(k_1,k_2)T_C\{\delta(n_1-k_1,n_2-k_2)\}=$$
$$=\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}f(k_1,k_2)h(n_1-k_1,n_2-k_2) \qquad [4.21]$$

essendo $\delta(n_1, n_2)=\delta(-n_1, -n_2)$. La [4.21] rappresenta la convoluzione discreta, nella forma duale della [4.11].

Per quanto già indicato (relazione [4.12]) e in analogia con i sistemi continui, la trasformata $z$ dell'uscita è uguale al prodotto della trasformata $z$ della $f(n_1,n_2)$ per la trasformata $z$ della $h(n_1,n_2)$, espressa da:

$$H(z_1,z_2)=\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}h(n_1,n_2)z_1^{-n_1}z_2^{-n_2} \qquad [4.22]$$

che è chiamata la funzione di trasferimento in $z$ del sistema discreto (Cappellini, Constantinides, Emiliani, 1978). Utilizzando le relazioni [4.16] e [4.17], la relazione [4.22] può essere espressa in funzione delle frequenze angolari spaziali $\omega_x$ e $\omega_y$:

$$H(e^{j\omega_x},e^{j\omega_y})=H(\omega_x,\omega_y)=\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}h(n_1,n_2)e^{-jn_1\omega_x}e^{-jn_2\omega_y} \qquad [4.23]$$

la cui interpretazione fisica è più agevole e immediata. La $H(\omega_x, \omega_y)$, espressa dalla [4.23], è anche chiamata risposta in frequenza del sistema 2D discreto, avente la risposta impulsiva discreta $h(n_1, n_2)$.

La funzione $H(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y})$ o $H(\omega_x, \omega_y)$ descrive il comportamento in ampiezza e fase del sistema 2D discreto. Essendo $H(\omega_x, \omega_y)$ complessa, può essere rappresentata in due forme, in funzione della sua parte reale e immaginaria:

$$H(\omega_x, \omega_y) = H_R(\omega_x, \omega_y) + jH_I(\omega_x, \omega_y) \qquad [4.24]$$

o mediante il suo modulo $|H(\omega_x, \omega_y)|$ e la sua fase $\beta(\omega_x, \omega_y)$:

$$H(\omega_x, \omega_y) = |H(\omega_x, \omega_y)|\, e^{-j\beta(\omega_x, \omega_y)}. \qquad [4.25]$$

E' utile osservare che $H(\omega_x, \omega_y)$, in accordo con la proprietà generale valida per la rappresentazione spettrale di sequenze 2D (relazione [3.4]), è una funzione continua di $\omega_x$ e $\omega_y$, periodica nelle due variabili $\omega_x$ e $\omega_y$ con periodo $2\pi$ (relazione [4.15]); cioè:

$$H(\omega_x, \omega_y) = H(\omega_x + 2k_1\pi, \omega_y + 2k_2\pi) \qquad [4.26]$$

con $k_1, k_2 = -\infty, \infty$. Ciò significa che $H(\omega_x, \omega_y)$ può essere espressa come una serie di Fourier (vedi § 1.2). Pertanto la relazione per $h(n_1, n_2)$ può anche essere ottenuta dalla definizione dei coefficienti di Fourier (De Castro, 1968), cioè:

$$h(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H(\omega_x, \omega_y)\, e^{jn_1\omega_x} e^{jn_2\omega_y} d\omega_x\, d\omega_y. \qquad [4.27]$$

Inoltre, come indicato in generale nella tabella 4.1, se $h(n_1, n_2)$ è una sequenza reale, la funzione di trasferimento $H(\omega_x, \omega_y)$ soddisfa la seguente proprietà:

$$H(\omega_x, \omega_y) = H^*(-\omega_x, -\omega_y) \qquad [4.28]$$

cioè la conoscenza della $H(\omega_x, \omega_y)$ nel primo quadrante delle frequenze angolari spaziali implica la conoscenza dei valori di $H(\omega_x, \omega_y)$ anche nel terzo quadrante e viceversa. Lo stesso vale per il secondo e quarto quadrante. Pertanto la $H(\omega_x, \omega_y)$ è univocamente determinata dai suoi valori in metà piano $(\omega_x, \omega_y)$.

## 4.5 Sistemi a dati campionati o numerici con e senza reazione (FIR e IIR)

Una classe molto generale e importante di sistemi 2D discreti o numerici lineari spazialmente invarianti è quella descritta dalla seguente relazione (Cappellini, Constantinides, Emiliani, 1978):

$$\sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} a(k_1, k_2) f(n_1 - k_1, n_2 - k_2) = \sum_{k_1=0}^{M_1-1} \sum_{k_2=0}^{M_2-1} b(k_1, k_2) g(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \qquad [4.29]$$

ove $\{f(n_1, n_2)\}$ è la sequenza (o matrice di dati) di ingresso, $\{g(n_1, n_2)\}$ è la sequenza (o matrice di dati) di uscita dal sistema, $\{a(k_1, k_2)\}$ e $\{b(k_1, k_2)\}$ sono le sequenze o matrici dei coefficienti che definiscono la funzione di trasferimento del sistema e $N_1$, $N_2, M_1, M_2$ sono numeri interi.

Effettuando la trasformata $z$ della relazione [4.29], si ottiene agevolmente la funzione di trasferimento $H(z_1, z_2)$:

$$H(z_1,z_2)=\frac{\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1} a(k_1,k_2)z_1^{-k_1}z_2^{-k_2}}{\sum_{k_1=0}^{M_1-1}\sum_{k_2=0}^{M_2-1} b(k_1,k_2)z_1^{-k_1}z_2^{-k_2}} \qquad [4.30]$$

che ha la forma di rapporto di due polinomi nelle due variabili $z_1$ e $z_2$.

Se $b(0, 0)=1$ e tutti gli altri $b(k_1, k_2)$ sono nulli, la relazione [4.29] diviene:

$$g(n_1,n_2)=\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1} a(k_1,k_2)f(n_1-k_1,n_2-k_2) \qquad [4.31]$$

e la relativa funzione di trasferimento assume la forma semplificata:

$$H(z_1,z_2)=\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1} a(k_1,k_2)z_1^{-k_1}z_2^{-k_2}. \qquad [4.32]$$

Le radici del polinomio a numeratore nella [4.30] (o del polinomio [4.32]) sono chiamate zeri del sistema, mentre le radici del polinomio a denominatore nella [4.30] sono chiamate poli del sistema.

Si può provare (Cappellini, Constantinides, Emiliani, 1978) che sistemi specificati dalla [4.30], detti anche ricorsivi o ricorrenti, hanno una risposta impulsiva $h(n_1, n_2)$ o $h(k_1, k_2)$ infinita (IIR), mentre sistemi specificati dalla [4.32], detti anche non ricorsivi o non ricorrenti, hanno una risposta impulsiva $h(k_1, k_2)$ finita (FIR).

I sistemi ricorrenti sono caratterizzati dal fatto che elaborano (tornando in ingresso) anche alcuni dati di uscita e quindi da una reazione intrinseca nel sistema, mentre i non ricorrenti elaborano solo i dati di ingresso effettivi (solo $f(n_1, n_2)$ e non $g(n_1, n_2)$) e perciò non hanno alcuna reazione.

Considerando le relazioni più generali [4.29] e [4.30], si hanno due configurazioni interessanti: sistemi ricorrenti in un quadrante; sistemi ricorrenti in mezzo piano.

La prima classe di sistemi ha risposta impulsiva definita in un quadrante del piano $(x, y)$ (indici $(n_1, n_2)$): si possono così definire quattro diversi tipi di sistema. Se si considerano le condizioni $g(n_1, n_2)=0$ per $n_1<0$ o $n_2<0$ e $f(n_1, n_2)=0$ per $n_1<0$ e $n_2<0$ e $b(0, 0)=1$, si può scrivere una relazione ricorrente ingresso-uscita del tipo:

$$\begin{aligned} g(n_1,n_2)=&\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1} a(k_1,k_2)f(n_1-k_1,n_2-k_2)-\\ &-\sum_{k_1=0}^{M_1-1}\sum_{k_2=0}^{M_2-1} b(k_1,k_2)g(n_1-k_1,n_2-k_2) \end{aligned} \qquad [4.33]$$

con $k_1+k_2\neq 0$ nella seconda sommatoria.

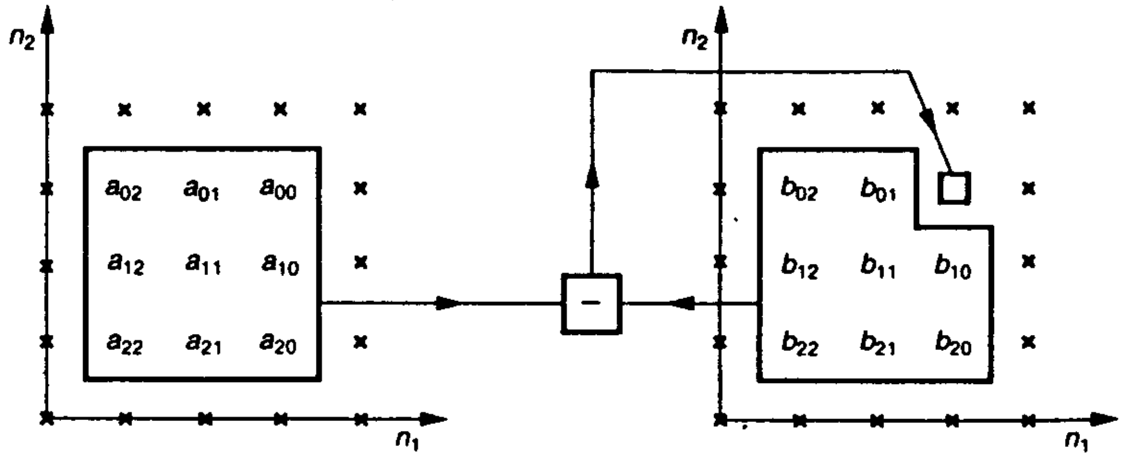



**Figura 4.1**
Esempio di operazione ricorrente da parte di un sistema con reazione (IIR) con $N_1 = N_2 = M_1 = M_2 = 3$.

Graficamente, la relazione precedente può rappresentarsi come in figura 4.1 (nel caso $N_1 = N_2 = M_1 = M_2 = 3$), con le condizioni iniziali specificate in figura 4.2. Con queste condizioni iniziali, ogni dato di uscita può essere ottenuto mediante la relazione [4.33] dai dati precedentemente elaborati e dalle condizioni iniziali.

La matrice $\{b(k_1, k_2)\}$, che definisce la parte ricorrente del sistema, è diversa da

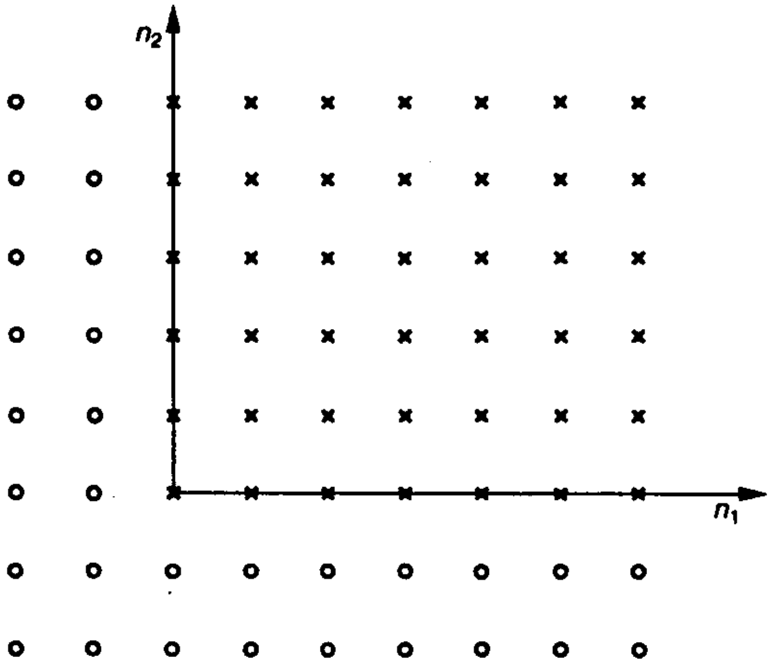



**Figura 4.2**
Condizioni iniziali per un sistema ricorrente (IIR) descritto dalla relazione [4.33].

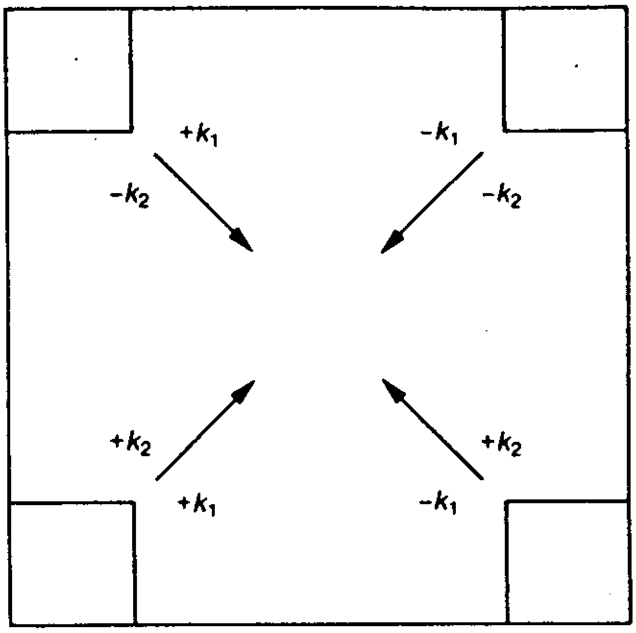



Figura 4.3
Sistemi discreti lineari invarianti spazialmente con risposte impulsive definite nei quattro quadranti.

zero solo nella regione con $k_1 \geqslant 0$ e $k_2 \geqslant 0$. Questa situazione può essere simbolicamente indicata nel modo seguente:

$$\{^1b(k_1, k_2)\} \quad k_1 \geqslant 0, \quad k_2 \geqslant 0. \qquad [4.34]$$

La $\{^1b(k_1, k_2)\}$ è chiamata sequenza del primo quadrante, e il sistema corrispondente è chiamato sistema nel primo quadrante. Possono definirsi sistemi con risposte impulsive definite negli altri quadranti (fig. 4.3): le loro matrici dei coefficienti (sequenze del secondo, terzo e quarto quadrante) sono definite nel seguente modo:

$$\begin{array}{lll} \{^2b(k_1, k_2)\} & k_1 \geqslant 0, & k_2 \leqslant 0 \\ \{^3b(k_1, k_2)\} & k_1 \leqslant 0, & k_2 \leqslant 0 \\ \{^4b(k_1, k_2)\} & k_1 \leqslant 0, & k_2 \geqslant 0. \end{array} \qquad [4.35]$$

## 4.6 Stabilità dei sistemi 2D discreti

La stabilità di un sistema 2D discreto è di fondamentale importanza per effettuare elaborazioni corrette ed efficienti dei dati di ingresso (campioni dell'immagine), che non presentino divergenze, deviazioni od oscillazioni non volute.

Si possono utilizzare diverse definizioni per precisare le condizioni di stabilità. La definizione più usata è la cosiddetta BIBO ("*bounded input, bounded output*", cioè

"ingresso limitato, uscita limitata"). Ciò significa che un sistema è stabile se la sua risposta a un ingresso limitato è pure limitata. E' possibile mostrare che un sistema 2D discreto lineare spazialmente invariante è stabile se e solo se (Cappellini, Constantinides, Emiliani, 1978):

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} |h(k_1, k_2)| < \infty \qquad [4.36]$$

ove $h(k_1, k_2)$ è la sua risposta impulsiva.

Se il sistema è del tipo FIR, la condizione [4.36] è sempre verificata; pertanto i sistemi del tipo FIR non presentano problemi di stabilità (come era anche intuitivo, alla luce del fatto che non hanno reazione o rielaborazione di dati di uscita).

Se il sistema è del tipo IIR, invece, occorre verificare la relazione [4.36] per assicurarsi dell'effettiva stabilità del sistema. Tale verifica può essere effettuata con diversi criteri, che in genere analizzano la struttura del polinomio a denominatore nella [4.30] e in particolare esaminano la posizione delle sue radici (poli) (Shanks, Treitel, Justice, 1972; Huang, 1972; Maria, Fahmi, 1973).

Sono state definite anche diverse procedure di stabilizzazione, che tendono a rendere a fase minima (cioè senza singolarità) il polinomio a denominatore nella [4.30]. Alcune di queste si basano sulla valutazione del *cepstrum* (definito come trasformata *z* inversa del logaritmo complesso della trasformata *z*) delle sequenze implicate nella stabilità del sistema o sulle proprietà della trasformata di Hilbert (Ekstrom, Woods, 1976; Pistor, 1974; Dudgeon, 1975). In definitiva queste procedure tendono a superare la difficoltà matematica rappresentata dal fatto che non è in generale possibile fattorizzare (cioè trovare un'espressione espansa come somma o prodotto di termini elementari di primo o secondo grado) un polinomio di due variabili, quale quello a denominatore nella [4.30] (nel qual caso basterebbe sostituire poli in regioni instabili con opportuni poli in regioni stabili).

## Riferimenti bibliografici


Cappellini V., Constantinides A. G., Emiliani P., *Digital Filters and Their Applications* (Academic Press, Londra e New York 1978).

De Castro E., *Complementi di analisi matematica* (Zanichelli, Bologna 1968).

Dudgeon D. E., *The Existence of Cepstra for Two-dimensional Rational Polynomials*, IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. ASSP-23, N. 2, 242 sg. (1975).

Ekstrom M. P., Woods J. W., *Two-dimensional Spectral Factorization with Applications in Recursive Digital Filtering*, IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. ASSP-24, N. 2, 115-28 (1976).

Huang T. S., *Stability of Two-dimensional Recursive Filters*, IEEE Trans. Audio Electroacoustics, vol. AU-20, N. 2, 158-63 (1972).

Maria G. A., Fahmi M. M., *On the Stability of Two-dimensional Digital Filters*, IEEE Trans. Audio Electroacoustics, vol. AU-21, N. 5, 470-72 (1973).

Oppenheim A. V., Schafer R. W., *Digital Signal Processing* (Prentice Hall, Englewood Cliffs 1975).

Pistor P., *Stability Criterion for Recursive Filters*, IBM J. Res. Div., vol. 18, N. 1, 59-71 (1974).

Shanks J. L., Treitel S., Justice J. H., *Stability and Synthesis of Two-dimensional Recursive Filters*, IEEE Trans. Audio Electroacoustics, vol. AU-20, N. 2, 115-28 (1972).

# Capitolo 5

# Trasformazioni numeriche bidimensionali

## 5.1 Introduzione

Le trasformazioni delle immagini campionate o numeriche sono di grande importanza, sia per l'analisi della struttura delle immagini stesse, sia per diverse elaborazioni utili (filtraggio numerico, compressione o riduzione dei dati, riconoscimento di forme).

In questo capitolo vengono presentate le trasformazioni numeriche 2D più importanti, dalla più nota di Fourier ad altre di notevole interesse per l'analisi e l'elaborazione delle immagini (quali quella di Hadamard-Walsh, di Karhunen-Loeve ecc.).

Prima di descrivere in dettaglio le diverse trasformazioni, sono presentate alcune considerazioni generali sulle trasformazioni stesse e sulla loro interpretazione.

## 5.2 Generalità sulle trasformazioni numeriche 2D

Una trasformazione lineare invertibile può essere definita in generale da una relazione del seguente tipo (Pratt, 1978):

$$F(k_1,k_2)=\sum_{n_1=1}^{N_1}\sum_{n_2=1}^{N_2} f(n_1,n_2)A(n_1,n_2;k_1,k_2) \qquad [5.1]$$

ove $f(n_1, n_2)$ sono i dati di ingresso (matrice di $N_1 \cdot N_2$ campioni dell'immagine continua in esame) e $A(n_1,n_2;k_1,k_2)$ rappresenta la "base" o "nocciolo" o "nucleo" ("*kernel*") dell'operatore di trasformazione. La trasformazione inversa risulta corrispondentemente espressa dalla relazione:

$$f(n_1,n_2)=\sum_{k_1=1}^{N_1}\sum_{k_2=1}^{N_2} F(k_1,k_2)B(n_1,n_2;k_1,k_2) \qquad [5.2]$$

ove $B(n_1, n_2; k_1, k_2)$ rappresenta l'inverso del nocciolo o base della trasformazione.

La trasformazione precedente è detta unitaria, se soddisfa a opportune condizioni di ortonormalità (Pratt, 1978). Si dice poi separabile, se i termini $A(n_1, n_2; k_1, k_2)$ e $B(n_1, n_2; k_1, k_2)$ possono essere scomposti nella seguente forma:

$$A(n_1, n_2; k_1, k_2) = A_c(n_1, k_1) A_r(n_2, k_2) \qquad [5.3]$$

$$B(n_1, n_2; k_1, k_2) = B_c(n_1, k_1) B_r(n_2, k_2) \qquad [5.4]$$

dove gli indici $(r, c)$ indicano operazioni di trasformazioni unidimensionali (1D) per righe e colonne. Una trasformazione 2D separabile può essere effettuata in due passi. Prima si effettua una trasformazione 1D per ogni colonna della matrice dell'immagine:

$$F_c(k_1, n_2) = \sum_{n_1=1}^{N_1} f(n_1, n_2) A_c(n_1, k_1). \qquad [5.5]$$

Poi si effettua una seconda trasformazione 1D per ogni riga di $F_c(k_1, n_2)$:

$$F(k_1, k_2) = \sum_{n_2=1}^{N_2} F_c(k_1, n_2) A_r(n_2, k_2). \qquad [5.6]$$

Le trasformazioni precedenti possono anche esprimersi in forma vettoriale. Se indichiamo con $\overline{f}_M$ la matrice dell'immagine e con $\overline{f}$ il *vettore* corrispondente (cioè la sequenza dei dati della matrice dell'immagine per colonne) e con $\overline{F}_M$ e $\overline{F}$, rispettivamente, la matrice della trasformata dell'immagine e il vettore corrispondente, la trasformazione [5.1] può essere rappresentata nella forma seguente:

$$\overline{F} = \overline{A}\overline{f} \qquad [5.7]$$

ove $\overline{A}$ è la matrice di trasformazione diretta. La trasformazione inversa [5.2] diviene:

$$\overline{f} = \overline{B}\overline{F} \qquad [5.8]$$

ove $\overline{B}$ è la matrice di trasformazione inversa. Risulta pertanto che:

$$\overline{B} = \overline{A}^{-1}. \qquad [5.9]$$

Per una matrice $\overline{A}$ reale unitaria, detta anche matrice ortogonale, vale la proprietà:

$$\overline{A}^{-1} = \overline{A}^T \qquad [5.10]$$

ove il simbolo $T$ a esponente designa la "trasposta" della matrice data.

Se poi la trasformazione è separabile, cioè tale che:

$$\overline{A} = \overline{A}_c \times \overline{A}_r \qquad [5.11]$$

ove $\overline{A}_r$ e $\overline{A}_c$ sono le matrici di trasformazione unitaria per righe e colonne, la matrice di trasformazione $\overline{F}_M$ può essere ottenuta dalla matrice dell'immagine $\overline{f}_M$ con la relazione:

$$\overline{F}_M = \overline{A}_c \overline{f}_M \overline{A}_r^T \qquad [5.12]$$

e la matrice della trasformazione inversa risulta:

$$\overline{f}_M = \overline{B}_c \overline{F}_M \overline{B}_r^T \qquad [5.13]$$

ove $\overline{B}_c = \overline{A}_c^{-1}$ e $\overline{B}_r = \overline{A}_r^{-1}$.

E' interessante sottolineare che le trasformazioni sopra considerate possono essere interpretate in diversi modi (Pratt, 1978).

(1) Scomposizione dei dati dell'immagine in uno spettro bidimensionale generalizzato, corrispondendo ogni componente spettrale nel dominio trasformato alla quantità di energia che l'immagine originaria possiede a quella componente dello spettro. Il concetto di frequenza viene così generalizzato a funzioni elementari diverse dai noti seni e coseni (della trasformata di Fourier). Quest'analisi spettrale generalizzata è utile sia per la conoscenza delle proprietà strutturali dell'immagine, sia per altre elaborazioni.

(2) Rotazione multidimensionale delle coordinate. Una proprietà delle trasformazioni unitarie interessante in questo ambito è che vengono mantenuti i rapporti relativi di misura (ad esempio la differenza quadratica media fra due immagini è uguale alla stessa differenza fra le trasformate delle immagini stesse).

(3) Rappresentazione sintetica dell'immagine ottenuta mediante le funzioni 2D $B(n_1, n_2; k_1, k_2)$, che costituiscono una base 2D, e il valore trasformato $F(k_1, k_2)$ che rappresenta l'ampiezza della base stessa.

Nel seguito, per semplificare la trattazione, saranno considerate matrici dell'immagine di dimensione quadrata ($N_1 = N_2 = N$), con indici ($n_1, n_2, k_1, k_2$) da 0 a $N-1$.

## 5.3 Trasformazione di Fourier

La trasformazione o trasformata di Fourier 2D discreta o numerica di una matrice di dati di ingresso (immagine campionata) è definita dalla relazione (Cappellini, Constantinides, Emiliani, 1978):

$$F(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2)\, e^{-\frac{2\pi j}{N}(k_1 n_1 + k_2 n_2)} \qquad [5.14]$$

e la trasformata inversa è espressa da:

$$f(n_1, n_2) = \frac{1}{N^2} \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} F(k_1, k_2)\, e^{\frac{2\pi j}{N}(k_1 n_1 + k_2 n_2)} \qquad [5.15]$$

Gli indici $k_1$ e $k_2$ corrispondono alle frequenze spaziali $\nu_x = k_1 \Delta\nu$, $\nu_y = k_2 \Delta\nu$, es-

sendo $\Delta\nu$ un incremento costante di frequenza o passo di campionamento nelle frequenze spaziali.[1]

Poiché le basi della trasformata di Fourier sono separabili e simmetriche, la trasformata 2D ([5.14] e [5.15]) può essere valutata come trasformata 1D sequenziale secondo le righe e le colonne. Infatti le funzioni di base esponenziali complesse possono essere facilmente decomposte in seni e coseni:

$$A(n_1, n_2; k_1, k_2) = e^{-\frac{2\pi j}{N}(k_1 n_1 + k_2 n_2)} = \cos\left[\frac{2\pi}{N}(k_1 n_1 + k_2 n_2)\right] - j\sin\left[\frac{2\pi}{N}(k_1 n_1 + k_2 n_2)\right]$$

$$B(n_1, n_2; k_1, k_2) = e^{\frac{2\pi j}{N}(k_1 n_1 + k_2 n_2)} = \cos\left[\frac{2\pi}{N}(k_1 n_1 + k_2 n_2)\right] + j\sin\left[\frac{2\pi}{N}(k_1 n_1 + k_2 n_2)\right].$$

Una delle proprietà interessanti della trasformata 2D discreta di Fourier è rappresentata dal significato della componente spettrale nell'origine:

$$F(0,0) = \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) \qquad [5.18]$$

che risulta uguale a $N^2$ volte la media spaziale dei dati dell'immagine.

E' poi facile verificare che:

$$F(k_1 + m_1 N, k_2 + m_2 N) = F(k_1, k_2) \qquad [5.19]$$

con $m_1$, $m_2 = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$, cioè la trasformata 2D discreta dell'immagine campionata è essenzialmente una rappresentazione del tipo serie di Fourier bidimensionale e l'immagine originale viene considerata periodica in senso orizzontale (secondo $x$) e verticale (secondo $y$) (fig. 5.1).

Si può anche verificare (Pratt, 1978) che per $f(n_1, n_2)$ reali positivi (immagine fisica reale, necessariamente positiva), basta valutare i valori trasformati in metà del piano delle frequenze spaziali (zona tratteggiata in fig. 5.1) per ottenere anche i valori nell'altra metà.

[1] E' da notare che le relazioni [5.14] e [5.15] non sono accettate da tutti gli autori: alcuni pongono i fattori di scala $1/N$ sia nella trasformata diretta sia in quella inversa, altri cambiano i segni degli esponenziali (Pratt, 1978).

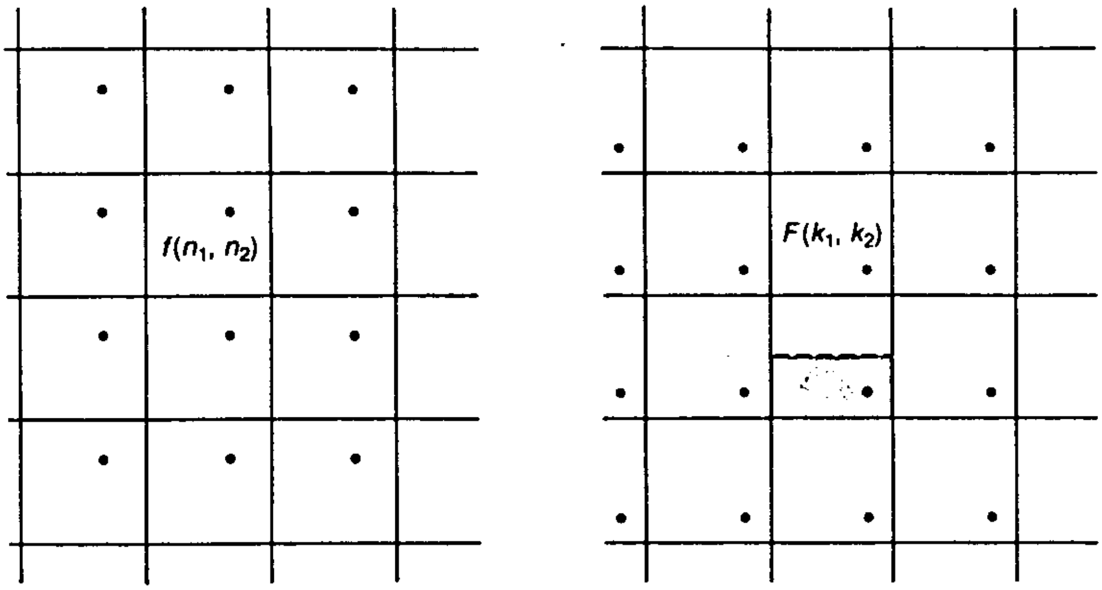



Figura 5.1
Ripetizione periodica dell'immagine campionata $f(n_1, n_2)$ e struttura periodica della sua trasformata di Fourier 2D discreta.

## 5.4 Trasformazioni coseno e seno

E' noto (De Castro, 1968) che la serie di Fourier di ogni funzione continua periodica reale e simmetrica contiene solo coefficienti reali, corrispondenti ai termini in coseno della serie. Questa proprietà si estende anche alla trasformata 2D discreta, purché si abbia un'immagine simmetrica o la si renda tale (come ad esempio in fig. 5.2).

La trasformata coseno con simmetria pari risulta (Pratt, 1978):

$$F(k_1, k_2) = 2 \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) \cos\left[\frac{\pi}{N} k_1 \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\right] \cos\left[\frac{\pi}{N} k_2 \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)\right]. \qquad [5.20]$$

Può essere definita anche la trasformata 2D discreta seno (Pratt, 1978):

$$F(k_1, k_2) = 2 \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) \sin\left[\frac{(n_1+1)(k_1+1)\pi}{N+1}\right] \sin\left[\frac{(n_2+1)(k_2+1)\pi}{N+1}\right]. \qquad [5.21]$$

## 5.5 Trasformazioni di Hadamard e Walsh

La trasformazione o trasformata di Hadamard si basa sulle proprietà della matrice di Hadamard (Hadamard, 1893), che è di forma quadrata con elementi uguali a + 1 e

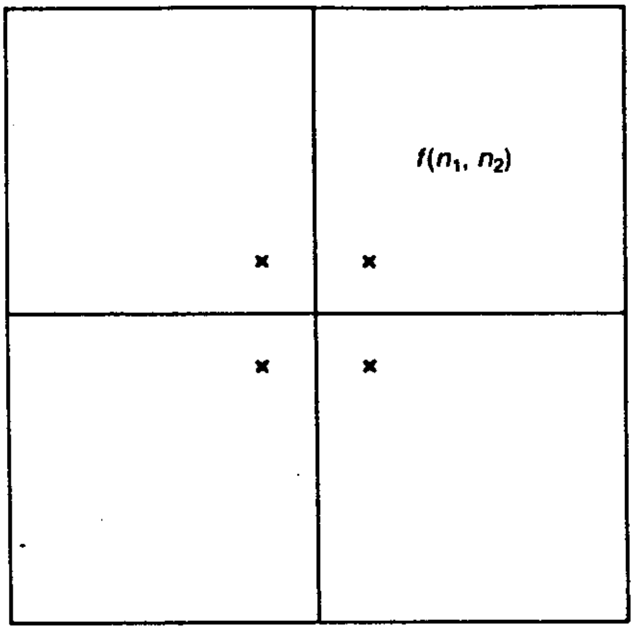



**Figura 5.2**
Procedura per rendere simmetrica un'immagine campionata $f(n_1, n_2)$ e potere quindi applicare la trasformata 2D discreta coseno.

$-1$, le cui righe e colonne sono ortogonali. Una matrice di Hadamard normalizzata, di dimensioni $N \cdot N$, soddisfa alla relazione:

$$\overline{HH}^T = \overline{I}. \qquad [5.22]$$

ove $\overline{I}$ è la matrice identità.

La matrice di Hadamard ortonormale di ordine più basso è la matrice di Hadamard $2 \cdot 2$ seguente:

$$\overline{H}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}. \qquad [5.23]$$

E' anche noto che, se esiste una matrice di Hadamard di dimensione $N(N>2)$, si ha che $N=0$ modulo 4 (Pratt, 1969). Sono state definite matrici di Hadamard con $N$ fino a 200. La costruzione più semplice si ha per una matrice di Hadamard di dimensione $N=2^n$, con $n$ intero; in questo caso, se $\overline{H}_N$ è una matrice di Hadamard di dimensione $N$, la matrice:

$$\overline{H}_{2N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \overline{H}_N & \overline{H}_N \\ \overline{H}_N & -\overline{H}_N \end{vmatrix} \qquad [5.24]$$

è una matrice di Hadamard di dimensione $2N$. Un esempio di applicazione di questa procedura è mostrato in tabella 5.1 per matrici di Hadamard di ordine 4 e 8.

La trasformata di Hadamard, definita dalla procedura [5.24], è anche nota in letteratura come trasformata di Walsh. E' stata infatti proposta (Harmuth, 1969) un'in-

Tabella 5.1 Struttura di matrici di Hadamard di ordine 4 e 8

| Matrice | Cambiamenti di segno |
|---|---|
| $H_4 = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc\|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$ | 0<br>3<br>1<br>2 |
| $H_8 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\begin{array}{cccc\|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$ | 0<br>7<br>3<br>4<br>1<br>6<br>2<br>5 |

terpretazione frequenziale per la matrice di Hadamard generata con la [5.24]: il numero di cambiamenti di segno lungo ogni riga della matrice di Hadamard, diviso per 2, è chiamato la sequenza della riga. E' possibile costruire una matrice di Hadamard di ordine $N=2^n$, il cui numero di cambiamenti di segno per riga aumenta da 0 a $(N-1)$: questa proprietà è chiamata proprietà della sequenza della matrice. Le righe della matrice di Hadamard (relazione [5.24]) possono anche essere considerate campioni di onde rettangolari con un subperiodo pari a $1/N$. Queste funzioni continue sono chiamate funzioni di Walsh. In questa interpretazione, la matrice di Hadamard effettua la decomposizione di una funzione in un insieme di onde rettangolari (al posto dei seni e coseni presenti nella trasformata di Fourier).[2]

Per matrici di Hadamard di ordine $N=2^n$, la trasformata discreta 2D di Hadamard può essere scritta in forma seriale (Pratt, 1978):

$$F(k_1,k_2)=\frac{1}{N}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1,n_2)(-1)^{p(n_1,n_2,k_1,k_2)} \qquad [5.25]$$

dove è:

$$p(n_1,n_2,k_1,k_2)=\sum_{i=0}^{n-1}(k_{1,i}n_{1,i}+k_{2,i}n_{2,i}) \qquad [5.26]$$

[2] E' da notare che vi sono matrici di Hadamard (ad esempio con $N=12$) per le quali le righe non sono funzioni di Walsh campionate.

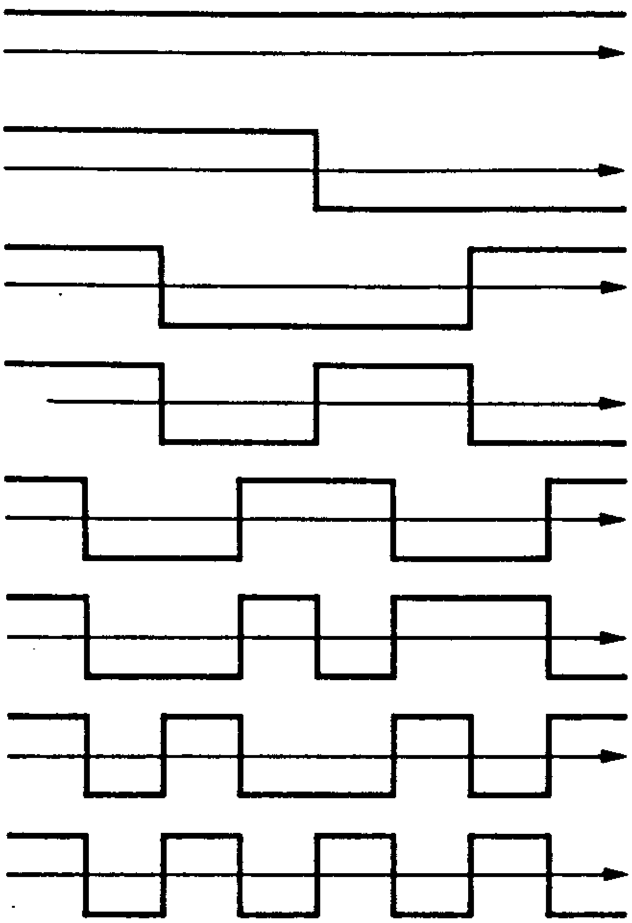


Figura 5.3
Funzioni di Walsh (funzioni di base per la trasformata di Hadamard) fino all'ordine 7.

rappresentando $k_{1,i}, k_{2,i}, n_{1,i}, n_{2,i}$ lo stato dei bit delle rappresentazioni binarie di $k_1, k_2, n_1, n_2$ (ad esempio per $k_1 = 12, k_{1,3} = 1, k_{1,2} = 1, k_{1,1} = 0, k_{1,0} = 0$).

Le funzioni di Walsh fino all'ordine 7 (funzioni base della trasformata di Hadamard) sono mostrate in figura 5.3.

## 5.6 Trasformazione di Haar

La trasformazione o trasformata di Haar deriva dalla matrice di Haar, che consiste di elementi uguali a $+1, -1$ e 0. Esempi di matrici ortonormali di Haar $4 \cdot 4$ e $8 \cdot 8$ sono mostrate in tabella 5.2.

La trasformata di Haar può essere collegata a un processo di campionamento dell'immagine, nel quale l'immagine è campionata con risoluzione sempre più fine, il passo di campionamento diminuendo con potenze del 2. Il dominio trasformato di Haar presenta alta concentrazione di energia differenziale in particolari zone (Pratt, 1978).

**Tabella 5.2** Struttura di matrici di Haar di ordine 4 e 8.

| Matrice di ordine 4 | Matrice di ordine 8 |
|---|---|
| $H_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$ | $H_8 = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ |

## 5.7 Trasformazione *slant*

La trasformazione o trasformata *slant* (Pratt, Welch, Chen, 1974) è una trasformata ortogonale che può essere derivata dalla trasformata di Hadamard. La trasformata *slant* di ordine 2 è uguale a quella di Hadamard:

$$\bar{S}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad [5.27]$$

La trasformata slant di ordine 4 si ottiene con la seguente relazione:

$$\bar{S}_4 = \frac{1}{2^{1/2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & b_4 & -a_4 & b_4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -b_4 & a_4 & b_4 & a_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{S}_2 & 0 \\ 0 & \bar{S}_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_4 + b_4 & a_4 - b_4 & -a_4 + b_4 & -a_4 - b_4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ a_4 - b_4 & -a_4 - b_4 & a_4 + b_4 & -a_4 + b_4 \end{vmatrix} \qquad [5.28]$$

ove $a_4$ e $b_4$ sono costanti reali che vanno determinate con la condizione che $\bar{S}_4$ deve essere ortogonale e con uguali incrementi nella base. Si può provare che: $a_4 = 2b_4 =$

$=2/\sqrt{5}$. Pertanto $\bar{S}_4$ risulta:

$$\bar{S}_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{-3}{\sqrt{5}} \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-3}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} \qquad [5.29]$$

## 5.8 Trasformazione di Karhunen-Loeve

La trasformazione o trasformata di Karhunen-Loeve è una trasformata del tipo (Karhunen, 1947; Loeve, 1948):

$$F(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) A(n_1, n_2; k_1, k_2) \qquad [5.30]$$

ove il termine $A(n_1, n_2; k_1, k_2)$ soddisfa l'equazione:

$$\lambda(k_1, k_2) A(n_1, n_2; k_1, k_2) = \sum_{n'_1=0}^{N-1} \sum_{n'_2=0}^{N-1} K(n_1, n_2; n'_1, n'_2) A(n'_1, n'_2; k_1, k_2) \qquad [5.31]$$

in cui $K(n_1,\ n_2;\ n'_1,\ n'_2)$ indica la funzione di covarianza dei dati dell'immagine e $\lambda(k_1,\ k_2)$ è una costante per valori di $k_1$ e $k_2$ fissati (Pratt, 1978). Le funzioni definite dalla [5.31] sono le autofunzioni (*eigenfunctions*) della funzione di covarianza e $\lambda(k_1,\ k_2)$ rappresenta gli autovalori (*eigenvalues*) della funzione di covarianza.

## 5.9 Trasformazione SVD

La trasformazione o trasformata SVD (*singular value decomposition*) è basata sulla scomposizione delle matrici in valori singolari (Pratt, 1978). La trasformata 2D diretta può essere definita nel seguente modo:

$$\bar{F} = \bar{A}_c \bar{f} \bar{A}_r^T \qquad [5.32]$$

e la trasformata inversa da:

$$\bar{f} = \bar{A}_c^T \bar{F} \bar{A}_r \qquad [5.33]$$

La matrice di trasformazione delle righe opera nel seguente modo:

$$\bar{A}_r[\bar{f}^T\bar{f}]\bar{A}_r^T=\bar{\Lambda} \qquad [5.34]$$

ove $\bar{\Lambda}$ è una matrice diagonale i cui termini $\lambda(k_1)$ sono gli autovalori (*eigenvalues*) della $\bar{f}^T\bar{f}$. Analogamente vale per le colonne:

$$\bar{A}_c[\bar{f}\bar{f}^T]\bar{A}_c^T=\bar{\Lambda}. \qquad [5.35]$$

Si ottiene così che:

$$\bar{F}=\bar{\Lambda}^{1/2} \qquad [5.36]$$

ove $\bar{\Lambda}^{1/2}$ è una matrice diagonale costituita da termini $\lambda^{1/2}(k_1)$ detti valori singolari di $\bar{f}$, che sono le rispettive radici quadrate degli autovalori $\lambda(k_1)$.

## 5.10 Confronto fra le diverse trasformazioni 2D discrete e algoritmi di calcolo veloce

Le diverse trasformazioni 2D discrete sopra considerate hanno la caratteristica comune, che le rende utili per diverse applicazioni, di avere in genere un'alta concentrazione dei valori trasformati. Ciò significa che, nel dominio trasformato $(k_1, k_2)$, i valori trasformati sono concentrati in una regione relativamente piccola rispetto all'estensione – come numero di elementi (pari, come ammesso, a $N^2$) – dell'immagine considerata. Naturalmente ciò varia, per le diverse immagini pratiche, con la particolare trasformazione 2D discreta usata.

E' evidente, ad esempio, che immagini con variazioni dei livelli di grigio sfumate di tipo continuo saranno rappresentate in modo più compatto nel dominio trasformato dalla trasformata 2D discreta di Fourier, in quanto basteranno poche componenti elementari di tipo sinusoidale per rappresentare, almeno nella sua struttura principale, la variazione dei livelli di grigio dell'immagine data e quindi l'immagine stessa. Immagini con brusche variazioni dei livelli di grigio (variazioni brusche bianco-nero, presenza di bordi marcati e frequenti...) saranno invece rappresentate in modo più compatto con trasformate del tipo di Hadamard o Walsh o Haar, che usano componenti elementari di tipo rettangolare (vedi fig. 5.3). Non è quindi possibile affermare che una trasformazione particolare è senz'altro la più efficiente (nel senso che richiede un minor numero di valori trasformati) per tutti i tipi di immagini.

Può essere comunque indicato che la trasformata di Karhunen-Loeve rappresenta in genere la più efficiente forma di espansione nel dominio trasformato, con minor numero di componenti elementari; essa però offre in genere anche la maggiore complessità di valutazione.

Dal punto di vista del calcolo dei valori trasformati, sono state fortunatamente definite procedure veloci di calcolo, che – specialmente al crescere del valore di $N$ – offrono risparmi di calcolo sorprendenti.

La trasformazione di un'immagine discreta di dimensioni $N \cdot N$ in una matrice di valori trasformati $N \cdot N$ (componenti o coefficienti) richiede infatti un numero di operazioni dell'ordine $N^4$ (intendendo per operazione una somma e una moltiplicazione). E' evidente la grande mole di calcoli necessari per immagini di grandi dimensioni (grande valore di $N$).

Il punto cruciale, su cui si basano le varie procedure o algoritmi di calcolo veloce, è rappresentato dalla possibilità di dividere le operazioni di calcolo in una successione di passi consecutivi, in modo tale che i risultati dei primi passi di calcolo (risultati parziali) possano essere utilizzati ripetitivamente nei passi successivi. A titolo d'esempio, consideriamo il calcolo di una trasformata di Hadamard di una sequenza di 4 dati (Pratt, 1978) $f(n_1)$. Il calcolo diretto richiede (tab. 5.1) le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
F(0)&=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)\\
F(1)&=f(0)-f(1)+f(2)-f(3)\\
F(2)&=f(0)+f(1)-f(2)-f(3)\\
F(3)&=f(0)-f(1)-f(2)+f(3).
\end{aligned} \qquad [5.37]$$

Per il calcolo delle precedenti relazioni occorrono $N(N-1)=12$ operazioni (un'operazione viene valutata per ogni segno + o − in un'espressione). In modo diverso si può procedere come segue:

primo passo:

$$\begin{aligned}
G(0)&=f(0)+f(2)\\
G(1)&=f(0)-f(2)\\
G(2)&=f(1)+f(3)\\
G(3)&=f(1)-f(3)
\end{aligned} \qquad [5.38]$$

secondo passo:

$$\begin{aligned}
F(0)&=G(0)+G(2)\\
F(1)&=G(0)-G(2)\\
F(2)&=G(1)+G(3)\\
F(3)&=G(1)-G(3).
\end{aligned} \qquad [5.39]$$

Il calcolo della $\overline{H}_4$ mediante le espressioni [5.38] e [5.39] richiede un totale di $N \log_2 N=8$ operazioni, con un risparmio di 4 operazioni.

Le operazioni sopra indicate possono anche essere rappresentate graficamente con linee e nodi: il numero di operazioni è uguale alla metà del numero di linee che entrano nei nodi (Pratt, 1978). Un'altra rappresentazione possibile è la fattorizzazione

della matrice $\overline{H}_4$, come segue:

$$\overline{H}_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}. \qquad [5.40]$$

Il numero di operazioni richiesto è pari alla metà del numero di elementi non zero presenti nelle due matrici.

I concetti indicati sopra per la trasformata di Hadamard possono essere generalizzati alle altre trasformazioni bidimensionali e anche multidimensionali. Sono stati introdotti algoritmi veloci di calcolo per la trasformata discreta di Fourier (Cooley, Lewis, Welch, 1967; Brigham, 1974), trasformata coseno (Ahmed, Natarajan, Rao, 1974), trasformata seno (Jain, 1974), trasformata Hadamard-Walsh (Pratt, Andrews, Kane, 1969), trasformata di Haar (Andrews, 1970), trasformata *slant* (Pratt, Chen, Welch, 1974). Non sono stati definiti algoritmi veloci per la trasformata di Karhunen-Loeve, ma algoritmi veloci approssimati (Jain, 1974).

La maggior parte delle trasformazioni discrete considerate richiede un numero di operazioni, nella forma veloce (*fast transform*) pari a $N \log_2 N$ (fa eccezione la trasformata di Haar, che può essere valutata con circa $2N$ operazioni per la sua natura "sparsa", cioè presenza di molti elementi nulli). Nella tabella 5.3 è indicata la complessità di calcolo per le diverse trasformazioni (forma unidimensionale).

Come esempio illustrativo la tavola 1A mostra la FFT 2D (ampiezza) di un'immagine di prova (quadrato bianco), mentre la tavola 1B riporta la FFT 3D (ampiezza) di un cubo (Pazzaglini, 1983).

Infine trasformazioni impieganti funzioni di base elementari di tipo sinusoidale (Fourier, coseno, seno) possono essere calcolate in modo indiretto mediante la cosiddetta trasformata *chirp-z* (Pratt, 1978), che risulta attraente con l'uso di filtri trasversali (non con calcolatori di tipo generale).

**Tabella 5.3** Confronto fra le operazioni necessarie per effettuare le diverse trasformazioni (è riportato il numero di operazioni per trasformazioni unidimensionali)

| Trasformazione | | Numero di operazioni |
|---|---|---|
| DFT | Trasformata di Fourier discreta | $N^2$ moltiplicazioni complesse-somme |
| FFT | Trasformata di Fourier veloce | $N \log_2 N$ moltiplicazioni complesse-somme |
| DWT | Trasformata di Walsh discreta | $N^2$ somme-sottrazioni |
| FWT | Trasformata di Walsh veloce | $N \log_2 N$ somme-sottrazioni |
| DHT | Trasformata di Haar discreta | $N^2$ somme-sottrazioni |
| FHT | Trasformata di Haar veloce | $2(N-1)$ somme-sottrazioni |
| DKT | Trasformata discreta di Karhunen-Loeve | $N^2$ moltiplicazioni-somme |

## Riferimenti bibliografici

Ahmed N., Natarajan T., Rao K. R., *On Image Processing and a Discrete Cosine Transform*, IEEE Trans. Computers, vol. C-23, N. 1, 90-93 (1974).

Andrews H. C., *Computer Techniques in Image Processing* (Academic Press, New York 1970).

Brigham E. O., *The Fast Fourier Transform* (Prentice Hall, Englewood Cliffs 1974).

Cappellini V., Constantinides A. G., Emiliani P., *Digital Filters and Their Applications* (Academic Press, Londra e New York 1978).

Cooley J. W., Lewis P. A., Welch P. D., *Historical Notes on the Fast Fourier Transform*, Proc. IEEE, vol. 55, N. 10, 1975-77 (1967).

De Castro E., *Complementi di analisi matematica* (Zanichelli, Bologna 1968).

Hadamard J., *Résolution d'une question relative aux déterminants*, Bull. Sci. Math. Ser. 2, vol. 17, pt. 1, 240-46 (1893).

Jain A. K., *A Fast Karhunen-Loeve Transform for Finite Discrete Images*, Proc. of the National Electronics Conference, Chicago, Illinois, 323-28 (1974).

Karhunen H. (1947), trad. ingl. di I. Selin, *On Linear Methods in Probability Theory*, The Rand Corporation, Doc. T-131 (1960).

Loeve M., *Fonctions aléatoires de second ordre* (Hermann, Parigi 1948).

Pazzaglini G., *Elaborazione di immagini tomografiche: analisi spettrale e interpolazione a tre dimensioni*, Tesi di Laurea in Ingegneria elettronica, Università di Firenze (luglio 1983).

Pratt. W. K., *Digital Image Processing* (Wiley, New York 1978).

– Andrews H. C., Kane J., *Hadamard Transform Image Coding*, Proc. IEEE, vol. 57, N. 1, 58-68 (1969).

– Welch L. R., Chen W. H., *Slant Transform Image Coding*, IEEE Trans. Commun., vol. COM-22, N. 8, 1075-93 (1974).

# Capitolo 6

# Elaborazioni locali spaziali

## 6.1 Premessa

Nei capitoli precedenti è stata descritta la conversione delle immagini continue in forma numerica e sono state analizzate le immagini numeriche da un punto di vista generale con un'adeguata caratterizzazione matematica (trasformata $z$ 2D) e con la presentazione delle diverse trasformazioni che ad esse possono essere applicate. E' stato anche impostato (cap. 4) lo studio generale dei sistemi numerici 2D, ai quali possono essere ricondotte in modo più o meno immediato le diverse elaborazioni numeriche effettuabili sulle immagini discrete o numeriche.

In questo capitolo sono descritte le elaborazioni numeriche più semplici e immediate sui dati dell'immagine campionata (elaborazioni locali spaziali), prima di passare a esaminare, nei successivi capitoli, le elaborazioni più complesse (filtraggio numerico, riduzione o compressione dei dati, riconoscimento di forme).

E' importante sottolineare che le elaborazioni locali spaziali di seguito considerate sono quelle più frequentemente usate in pratica, sia con sistemi di elaborazione di tipo generale (calcolatori, minicalcolatori) sia con sistemi speciali in hardware o con microprocessori, in quanto, per la loro semplicità, risultano veloci e poco costose.

## 6.2 Variazione della quantizzazione dei campioni dell'immagine

Nei paragrafi 3.3 e 3.4 è stato già descritto il procedimento di quantizzazione dei campioni dell'immagine e indicata la corrispondente precisione o risoluzione di rappresentazione dell'immagine in forma numerica. In sostanza aumentando il passo di quantizzazione (riducendo il numero di livelli di grigio) aumenta l'errore di quantizzazione (relazione [3.12]) e diminuisce la precisione o risoluzione di rappresentazione.

In pratica si procede a ridurre il numero di livelli di grigio quando si vuole avere una rappresentazione più economica dell'immagine in esame (minore numero di bit o

di byte, vedi tabb. 3.1 e 3.2). Questo è particolarmente importante quando si ha un gran numero di immagini da elaborare e memorizzare, oppure quando si vuole semplificare l'elaborazione stessa (minore numero di bit, operazioni più semplici). Il caso limite di riduzione del numero di livelli è ovviamente a due soli livelli (bianco e nero), che peraltro per certe applicazioni può mantenere un contenuto informativo utile (un esempio è mostrato nelle tavv. 2, 3, ove viene confrontata la rappresentazione di un volto con $2^8 = 256$ livelli di grigio con lo stesso a soli due livelli).

Come già osservato nel paragrafo 3.4, si può ricorrere anche a operazioni di quantizzazione dei campioni di tipo non uniforme, riducendo ad esempio il numero di livelli di grigio ove si hanno forti variazioni di contrasto e aumentandolo ove il contrasto varia poco, oppure basandosi sulla distribuzione di ampiezza dei livelli di grigio (§ 6.5) per riservare una quantizzazione più fine nell'intorno dei livelli più frequenti.

## 6.3 Espansione della scala dei livelli di grigio (esaltazione dei contrasti)

Definita una determinata legge di quantizzazione (in genere connessa al sistema pratico di campionamento spaziale, quantizzazione e codifica binaria a disposizione), la particolare immagine in esame risulta per lo più avere un livello minimo di grigio maggiore del minimo assoluto (ad esempio livello 0 = nero) ed un livello massimo minore del massimo assoluto (ad esempio livello 255 = bianco).

Può essere allora conveniente, in particolare per esaltare i contrasti dell'immagine (e avere quindi immagini più nitide), espandere la scala dei livelli di grigio con il procedimento di seguito illustrato (Spatial Data Systems Inc., 1979).

Ammettiamo di avere un'immagine campionata con valore minimo di livello di grigio pari a 60 (fig. 6.1) e livello massimo pari a 145 (essendo il massimo assoluto o fondo scala uguale a 255, corrispondente a una quantizzazione con parole di 8 bit). L'espansione di scala avviene con due passi:

*a*) sottrazione da tutti i livelli di grigio del valore 60;
*b*) moltiplicazione per 3 dei livelli ottenuti in *a*).

La prima operazione porta il livello minimo a 0 e il massimo a 85 ($f'_M$); la seconda operazione espande la dinamica dei livelli da 0-85 a 0-255, utilizzando tutti i livelli a disposizione (ovvero tutti i bit a disposizione).

E' evidente che l'immagine ottenuta mostrerà un contrasto (variazione dei livelli) maggiore di quella originale. Il procedimento si applica per qualunque situazione di partenza (sottratto il minimo, basterà moltiplicare per il numero pari a $255/f'_M$).[1]

[1] Il procedimento di espansione di scala può essere applicato anche a immagini a colori; considerando le tre sottoimmagini nel rosso, verde e blu, dopo aver sottratto dai loro livelli di grigio i rispettivi valori minimi, basterà moltiplicare tutti i livelli per il numero $255/f'_{Mi}$, essendo $f'_{Mi}$ il valore massimo risultante dopo la sottrazione per ciascuno dei colori *i* (rosso, verde, blu).

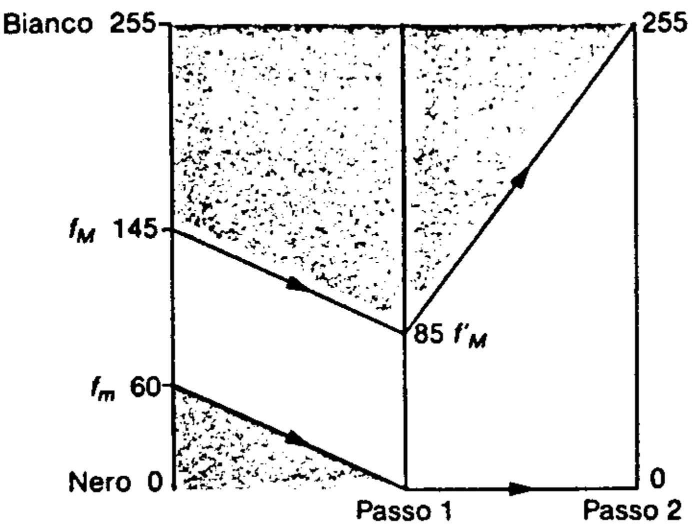



**Figura 6.1**
Esempio di espansione della scala dei livelli di grigio per un'immagine avente livello minimo $f_m = 60$, livello massimo $f_M = 145$: in un primo passo si sottrae dai livelli il valore minimo 60, in un secondo passo si moltiplicano i nuovi livelli per il fattore $255/f'_M = 255/85 = 3$.

## 6.4 Espansione dell'immagine

Può essere utile, in alcune fasi di elaborazione delle immagini o per alcune applicazioni, espandere l'immagine in esame di dimensioni (effetto "zoom"), in particolare per vedere a scala spaziale maggiore un determinato particolare dell'immagine.

Tale espansione è facilmente ottenuta, ripetendo uno stesso dato campionato dell'immagine (pixel) in forma di matrice quadrata $2 \cdot 2$ (fig. 6.2) o $3 \cdot 3$. Tale procedimento di espansione (in particolare con la matrice $2 \cdot 2$) può anche essere applicato più volte consecutivamente, per ottenere un effetto di espansione maggiore.

## 6.5 Distribuzione di ampiezza (istogramma) dei livelli di grigio

La determinazione della distribuzione o istogramma dei livelli di grigio rappresenta di per sé un'elaborazione estremamente utile per conoscere la struttura in ampiezza dell'immagine ed è di fondamentale importanza per molte altre elaborazioni più o meno connesse, di seguito illustrate.

La distribuzione considerata corrisponde alla densità di probabilità del primo ordine, presentata in modo generale nell'analisi statistica delle immagini del paragrafo 1.5 ($p(f; x, y)$ per immagini in bianco-nero statiche quali quelle qui considerate).

Avendo l'immagine in forma campionata, si ottiene la distribuzione o istogramma in pratica attraverso la valutazione delle "frequenze statistiche" (vedi § 1.5), contando il numero di volte che un determinato livello di grigio si presenta nell'immagine

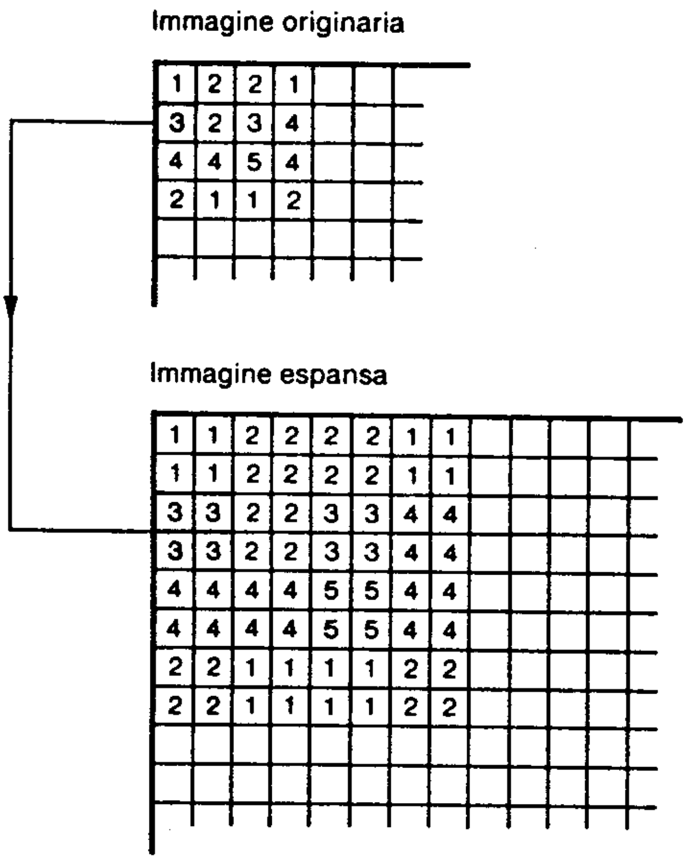
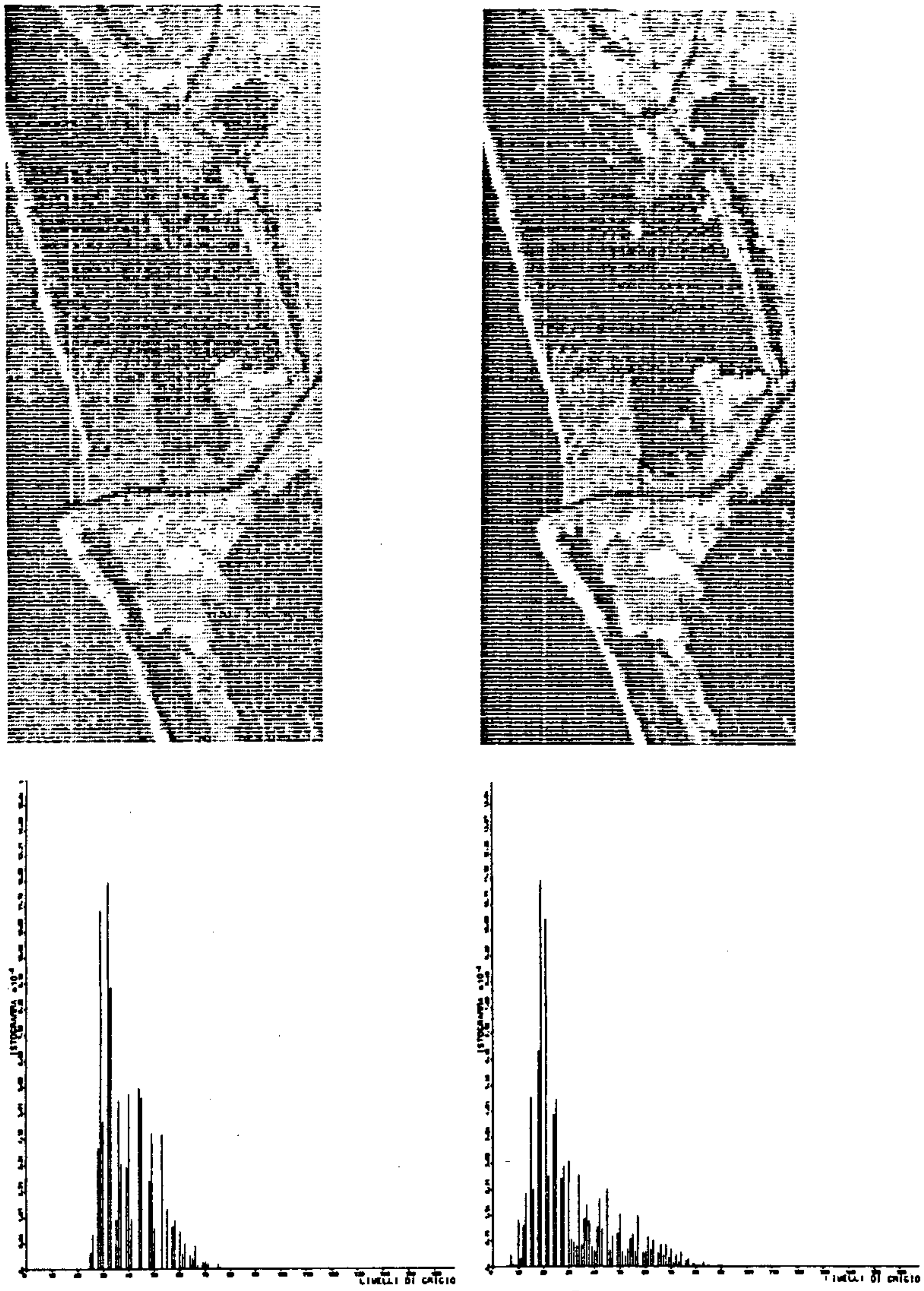



**Figura 6.2**
Esempio di espansione spaziale dell'immagine (effetto "zoom"), ripetendo uno stesso livello di grigio (quale il valore tratteggiato 3) in forma di matrice quadrata $2 \cdot 2$ (matrice tratteggiata in basso).

in esame e dividendo tale numero per il numero totale di dati o pixel dell'immagine stessa. Un esempio di istogramma dei livelli di grigio è riportato nella figura 6.3.

Come osservato, l'istogramma è di grande utilità. Anzitutto fornisce una valutazione globale della distribuzione in ampiezza dell'immagine, mostrando quali livelli sono più o meno frequenti. Tale conoscenza è, ad esempio, immediatamente utile per l'operazione di espansione di scala sopra descritta (in quanto fornisce anche i livelli minimo e massimo effettivamente presenti nell'immagine). Poiché i diversi oggetti dell'immagine hanno in genere livelli diversi, l'istogramma fornisce un primo modo relativamente semplice di classificazione degli oggetti, che vengono appunto individuati dai diversi livelli su cui i pixel degli oggetti si addensano (vedi anche cap. 10). L'istogramma è poi utile per diverse elaborazioni di riduzione o compressione dei dati (vedi cap. 8).



BANDA 4 BANDA 5

**Figura 6.3**
Esempio di istogramma (distribuzione di ampiezza) su due immagini da satellite LANDSAT: (*in alto*) le due immagini (banda 4 e banda 5) provengono da una ripresa del 1975 da satellite LANDSAT della foce dell'Arno vicino a Pisa (presentazione dell'immagine numerica con ~ 10 livelli di grigio); i relativi istogrammi (*in basso*) fanno riferimento alla scala completa dei livelli di grigio (da 0 a 255).

## 6.6 Media aritmetica (filtraggio passa-basso)

E' spesso utile estrarre valori medi dall'immagine in esame, in particolare per ridurre variazioni brusche indesiderate dei livelli di grigio (riduzione di disturbi e rumore localizzati spazialmente).

Un metodo semplice per ottenere quanto sopra indicato consiste nell'effettuare la media aritmetica su blocchi 2 · 2 o 3 · 3 di dati.

Un primo procedimento (fig. 6.4) corrisponde a effettuare la media aritmetica di 4 dati vicini e a sostituire la media stessa ai 4 dati. Questa operazione può peraltro permettere la riduzione di scala o concentrazione dell'immagine, mantenendo dei 4 dati solo uno (riduzione di un fattore 4). Un procedimento analogo corrisponde a effettuare la media aritmetica di 9 dati vicini e sostituire la media ai 9 dati.

Un altro procedimento, indicato in figura 6.5, corrisponde a operare su un blocco di dati 3 · 3, a effettuare la media sui 9 dati (fig. 6.5*a*):

$$f_{5m} = \sum_{i=1}^{9} f_i \qquad [6.1]$$

e a sostituire il valore $f_{5m}$ al valore $f_5$ originale, ripetendo l'operazione per tutti i

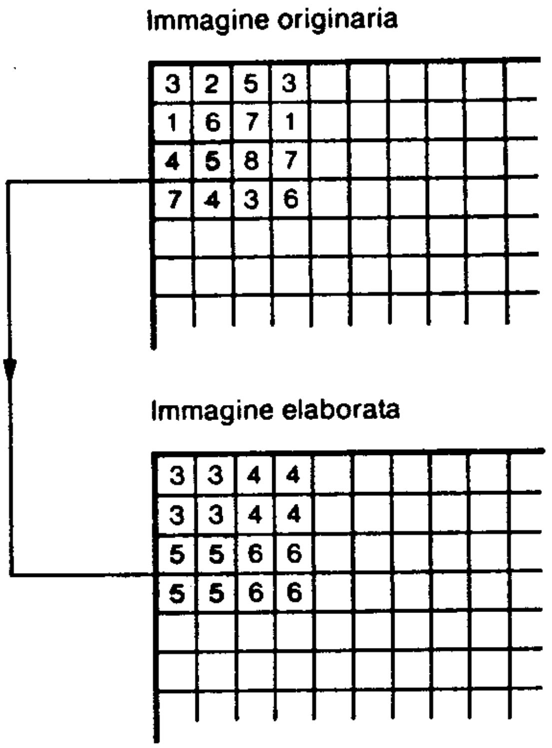



**Figura 6.4**
Esempio di media aritmetica (filtraggio passa-basso) su 4 dati vicini (tratteggiati in alto) e sostituzione della media ad essi (dati tratteggiati in basso).

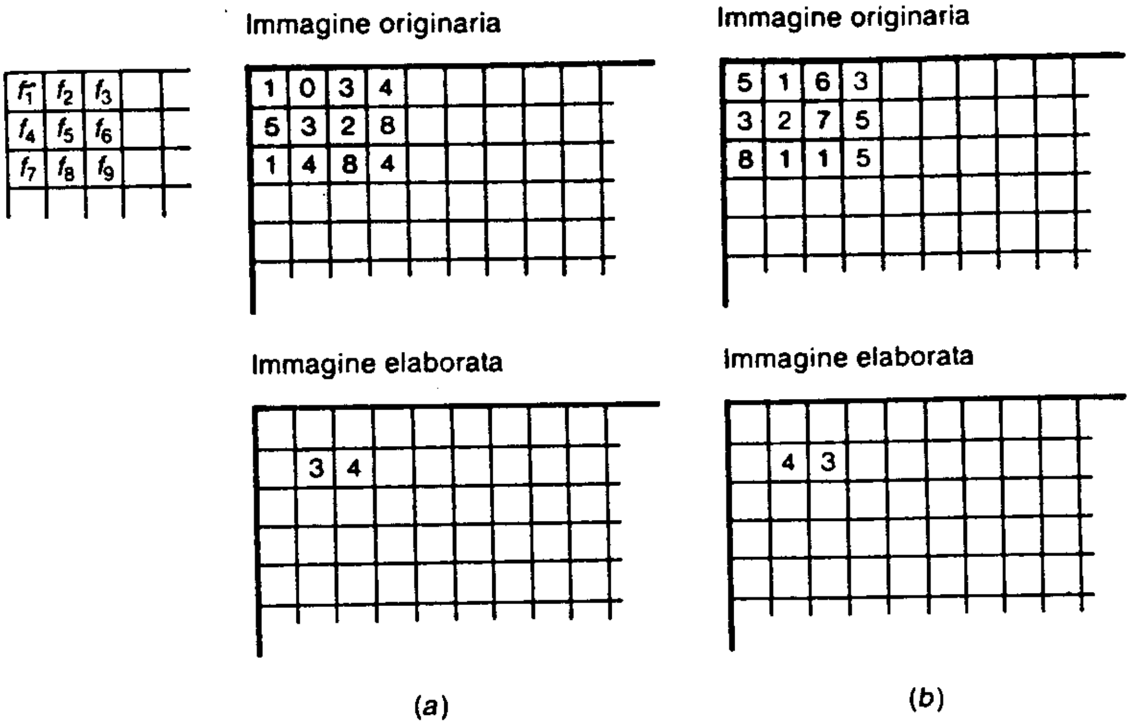



**Figura 6.5**
Esempio di media aritmetica (filtraggio passa-basso) su 9 dati vicini (blocco 3 · 3): in (*a*) sono usati tutti e 9 i dati e il valore ottenuto viene attribuito al pixel centrale; in (*b*) sono usati gli 8 dati intorno a quello centrale al quale viene attribuito il valore di media ottenuto.

blocchi adiacenti (parzialmente sovrapposti) 3 · 3. Come variante di questo procedimento, si effettua la media su 8 dati, escluso $f_5$ (fig. 6.5*b*):

$$f_{5m} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 5}}^{9} f_i \qquad [6.2]$$

e il valore ottenuto si assegna al valore $f_5$ originale.

E' evidente che le precedenti operazioni di media corrispondono a filtraggi di tipo passa-basso nel campo delle frequenze spaziali, nel senso che vengono ridotte variazioni dei livelli di grigio alle frequenze più alte, con il risultato di un notevole miglioramento della qualità dell'immagine in esame se le componenti alle frequenze più alte sono essenzialmente dovute a disturbi e rumore.

## 6.7 Differenza di livelli di grigio (filtraggio passa-alto)

Un metodo operativo duale del precedente (media aritmetica) è rappresentato dalla determinazione delle differenze fra livelli di grigio adiacenti (in sostanza si passa dalla somma alla differenza di livelli di grigio). L'operazione differenza fra livelli è

utile per esaltare le variazioni e i contrasti, rinforzando ad esempio i bordi e i contorni.

Un primo semplice procedimento corrisponde a spostare l'immagine originaria di una riga e ad effettuare la differenza fra i pixel corrispondenti dell'immagine originaria e di quella spostata; indicando con $d_i$ la differenza, può essere poi adottata la seguente decisione:

$d_i=0$ sostituzione di un livello di grigio intermedio (livello a metà scala) al pixel corrispondente nell'immagine originaria

$d_i>0$ sostituzione di un livello di grigio elevato (caso limite fondo scala, ad esempio bianco) al pixel corrispondente nell'immagine originaria [6.3]

$d_i<0$ sostituzione di un livello di grigio piccolo (caso limite inizio scala, ad esempio nero) al pixel corrispondente nell'immagine originaria.

E' evidente che con la decisione precedente si ottiene un'immagine in cui sono rinforzate le transizioni da un livello a un altro di grigio (ad esempio con un fondo grigio e linee bianche e nere intorno ai contorni degli oggetti).

Il procedimento sopra indicato con spostamento di una riga mette in evidenza le variazioni fra riga e riga, cioè lungo le colonne dell'immagine. Con spostamento di una colonna si mettono in evidenza, in modo analogo, le variazioni fra colonna e colonna, cioè lungo le righe dell'immagine.

Per ottenere esaltazione delle variazioni sia secondo le righe (asse $x$ orizzontale) sia secondo le colonne (asse $y$ verticale), basterà spostare l'immagine di una riga e una colonna e procedere come sopra.

Un altro procedimento per usare le differenze dei livelli corrisponde ad ottenere (facendo riferimento alle notazioni di fig. 6.5) il valore di uscita:

$$f_{sa}=8f_s-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{9} f_i. \qquad [6.4]$$

Le operazioni precedenti di differenza corrispondono a filtraggi di tipo passa-alto nel campo delle frequenze spaziali, nel senso che vengono esaltate variazioni dei livelli di grigio alle frequenze più alte, con il risultato di esaltazione dei bordi e contorni e loro estrazione più o meno netta dal contesto dell'immagine.

## 6.8 Operatori locali spaziali 2 · 2 e 3 · 3 per l'estrazione dei contorni

Si è già più volte indicato l'interesse notevole per l'estrazione dei contorni o bordi dall'immagine in esame, al fine di ottenere gli elementi strutturali fondamentali dell'immagine stessa (figure, oggetti...). Diverse elaborazioni indicate permettono di ottenere esaltazione dei contrasti e dei contorni (§§ 6.2, 6.3, 6.7).

In particolare nel paragrafo 6.7 si è indicato come le differenze fra i livelli di grigio forniscano indicazioni utili sui contorni. In effetti tali differenze rappresentano misure o stime del gradiente dell'immagine (gradiente del livello di grigio) nei vari punti analizzati.

La maggior parte degli operatori locali spaziali per l'estrazione dei contorni si basa appunto sulla determinazione o stima del gradiente. Una volta che sia valutato il gradiente in ampiezza (modulo) e direzione (angolo) in un punto, viene confrontata la sua ampiezza con un certo valore di soglia; se essa è maggiore del valore di soglia, si assume in genere che il punto considerato fa parte di un contorno, la cui direzione è ortogonale o normale alla direzione del gradiente (Bullock, 1974; Pratt, 1978; Cappellini, 1979, 1980).

Un primo metodo per stimare il valore del gradiente consiste nel valutare le due componenti ortogonali del gradiente nel punto in esame, $D_x$ secondo $x$ e $D_y$ secondo $y$, e ottenere quindi il suo modulo:

$$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} \qquad [6.5]$$

e la sua direzione:

$$\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{D_y}{D_x}\right). \qquad [6.6]$$

Le due componenti $D_x$ e $D_y$ possono essere stimate in molti modi. Se si considera un punto (pixel) di coordinate $(n_1, n_2)$ e livello di grigio pari a $f(n_1, n_2)$, il modo più semplice per ottenere le componenti $D_x$ e $D_y$ è quello delle differenze con i livelli dei punti vicini (già indicato nel § 6.7):

$$D_x = f(n_1, n_2 + 1) - f(n_1, n_2) \qquad [6.7]$$

$$D_y = f(n_1, n_2) - f(n_1 + 1, n_2) \qquad [6.8]$$

essendo più esattamente $f(n_1, n_2 + 1)$ il livello del punto a destra di quello in esame e $f(n_1 + 1, n_2)$ il livello del punto al di sotto di quello in esame (vedi anche la relazione [3.10]). Le operazioni [6.7] e [6.8] corrispondono a usare le cosiddette maschere indicate di seguito (la maschera indica in sostanza, con i suoi numeri, il peso o moltiplicatore da applicare al corrispondente livello di grigio, con il relativo segno di somma o sottrazione):

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}. \qquad [6.9]$$

Un modo equivalente per stimare le due componenti del gradiente è il metodo di Roberts, le cui relazioni sono:

$$D_1 = f(n_1, n_2 + 1) - f(n_1 + 1, n_2) \qquad [6.10]$$

$$D_2 = f(n_1, n_2) - f(n_1 + 1, n_2 + 1) \qquad [6.11]$$

con le corrispondenti maschere:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

che fornisce due componenti ortogonali, ruotate di un angolo pari a $\pi/4$ rispetto agli assi $(x, y)$ dell'immagine.

Si può osservare che, per accentuare i contorni, si possono effettuare anche le differenze delle differenze; ad esempio, per quanto riguarda contorni orizzontali, si ha:

$$D'_x = f(n_1, n_2) - f(n_1, n_2 - 1) - [f(n_1, n_2 + 1) - f(n_1, n_2)] =$$
$$= 2f(n_1, n_2) - f(n_1, n_2 - 1) - f(n_1, n_2 + 1). \quad [6.12]$$

La valutazione del gradiente è più accurata, se si considerano matrici di $3 \cdot 3$ elementi nell'intorno del punto in cui si valuta il gradiente. Sono noti molti metodi, che assegnano pesi diversi ai valori vicini al punto centrale. Alcune delle maschere utilizzate sono indicate di seguito.

(*a*) gradiente "*smoothed*"

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad [6.13]$$

(*b*) gradiente di Sobel

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \quad [6.14]$$

(*c*) gradiente isotropico

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \end{vmatrix}. \quad [6.15]$$

Le relazioni che rappresentano le precedenti maschere hanno le seguenti espressioni:

$$D_x(n_1, n_2) = f(n_1 - 1, n_2 + 1) + wf(n_1, n_2 + 1) + f(n_1 + 1, n_2 + 1) -$$
$$- f(n_1 - 1, n_2 - 1) - wf(n_1, n_2 - 1) - f(n_1 + 1, n_2 - 1) \quad [6.16]$$

$$D_y(n_1, n_2) = f(n_1 - 1, n_2 - 1) + wf(n_1 - 1, n_2) + f(n_1 - 1, n_2 + 1) -$$
$$- f(n_1 + 1, n_2 - 1) - wf(n_1 + 1, n_2) - f(n_1 + 1, n_2 + 1) \quad [6.17]$$

ove il peso $w$ può assumere i valori $1, 2, \sqrt{2}$, rispettivamente per le tre maschere pre-

cedenti. Un esempio di estrazione dei contorni con operatore del tipo di Sobel è mostrato nelle tavole 4, 5.

Un'altra procedura per la valutazione del gradiente e l'identificazione dei contorni è basata sull'uso di un gruppo o insieme di maschere (in genere 8 maschere) con diversa orientazione e sulla ricerca sequenziale per ogni punto della migliore corrispondenza (*matching*) fra le diverse maschere del gruppo e la zona dell'immagine esaminata (9 pixel del blocco 3 · 3). In pratica ciò è effettuato sovrapponendo ciascuna maschera di un gruppo sulla zona dell'immagine in esame ed effettuando le opportune somme dei prodotti fra i valori della maschera e i livelli di grigio corrispondenti (come nei precedenti operatori locali). Si assume come gradiente quello relativo alla maschera che dà il valore maggiore della somma dei prodotti precedenti e come direzione del gradiente viene considerata quella della maschera stessa.

Ogni maschera del gruppo è ottenuta dalla precedente mediante una permutazione circolare dei suoi elementi intorno a quello centrale. Se si assume, ad esempio, che la prima maschera di un certo gruppo è rappresentata da:

$$M_1 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix} \qquad [6.18]$$

la seconda e terza maschera risultano:

$$M_2 = \begin{vmatrix} B & C & F \\ A & E & I \\ D & G & H \end{vmatrix} \qquad M_3 = \begin{vmatrix} C & F & I \\ B & E & H \\ A & D & G \end{vmatrix} \qquad [6.19]$$

e così via.

I gruppi di maschere più frequentemente usate sono ottenuti attraverso la permutazione delle seguenti maschere (Kammenos, 1976; Cappellini, 1979):

(*a*) maschera di Prewitt (Lipkin, Rosenfeld, 1970)

$$M_P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \qquad [6.20]$$

(*b*) maschera di Kirsch (Kirsch, 1971)

$$M_K = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{vmatrix} \qquad [6.21]$$

(*c*) maschere di Robinson (Robinson, 1976)

$$M_R = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \qquad M_R = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}. \qquad [6.22]$$

I precedenti metodi sono stati estesi da altri autori (Pratt, 1978; Frei, Chen, 1977). Sono state anche proposte diverse procedure di tipo non lineare per l'estrazione dei contorni. Una di queste (Roberts, 1965) ha la seguente espressione:

$$D_R(n_1, n_2) = \{[f(n_1, n_2) - f(n_1+1, n_2+1)]^2 + [f(n_1, n_2+1) - f(n_1+1, n_2)]^2\}^{1/2}. \qquad [6.23]$$

Altre tecniche di estrazione dei contorni di tipo non lineare sono state proposte da Sobel, Wallis, Rosenfeld... (Pratt, 1978).

Tutte le precedenti tecniche di estrazione dei contorni sono essenzialmente basate, nella definizione particolare dell'algoritmo di estrazione, su criteri euristici o sperimentali. Si hanno però anche alcune proposte e definizioni di algoritmi, basate su considerazioni geometriche o matematiche più complete e rigorose (Hueckel, 1971; Haralick, 1980): confronto di modelli di contorni ideali con quelli presenti nell'immagine in esame e conseguenti decisioni; descrizione dell'immagine come solido tridimensionale e approssimazione della sua superficie (valori dei livelli di grigio $f(n_1, n_2)$) con piani elementari, con pendenze legate alle variazioni dei livelli di grigio, con decisione di presenza di contorno quando le pendenze dei piani adiacenti variano oltre un certo valore di soglia; ricerca degli algoritmi più efficienti mediante rappresentazione in uno spazio di Hilbert.

Infine nel capitolo 9 saranno considerate alcune tecniche di estrazione dei contorni per immagini con rumore.

## Riferimenti bibliografici

Bullock B., *The Performance of Edge Operators on Images with Texture*, Hughes Aircraft Company Research Lab., rapporto tecnico (1974).

Cappellini V., *Image Enhancement by Local Operators and Two-dimensional Filtering*, Intern. Workshop on Image Processing in Astronomy, Miramare-Trieste, 258-67 (1979).

– *Enhancement, Filtering and Preprocessing Techniques*, in Haralick R.M. e Simon J.C. (a cura di), "Issues in Digital Image Processing" (Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Riin 1980).

Frei W., Chen C.C., *Fast Boundary Detection: a Generalization and a New Algorithm*, IEEE Trans. on Computers, vol. C-26, N. 10 (1977).

Haralick R.M., *Edge and Region Analysis for Digital Image Data*, Computer Graphic and Image Processing, vol. 12, 60-73 (1980).

Hueckel M., *An Operator which Locates Edges in Digital Pictures*, JACM, vol. 18, N. 1, 113-25 (1971).

Kammenos P., *Opérateurs locaux pour l'extraction des contours*, Rapporto LTS 76.05, Laboratoire de Traitement de Signaux (Losanna 1976).

Kirsch R., *Computer Determination of the Constitutent Structure of Biological Images*, Comput. Biomed. Res., vol. 4 (1971).

Lipkin B. S., Rosenfeld A., *Picture Processing and Psychopictorics* (Academic Press, Londra e New York 1970).

Pratt W. K., *Digital Image Processing* (Wiley, New York 1978).

Robinson G. S., *Detection and Coding of Edges Using Directional Masks*, University of Southern California, Los Angeles, USC-IPL, Rep. 660 (1976).

Roberts L. G., *Machine Perception of Three-dimensional Solids*, in Tippett J. T. e altri (a cura di), "Optical and Electro-Optical Information Processing" (Massachusetts Insitute of Technology Press, Cambridge-Mass. 1965).

Spatial Data Systems Inc., *EyeCom Handbook of Image Processing* (Spatial Data Systems Inc., Goleta-California 1979).

# Capitolo 7

# Filtraggio numerico

## 7.1 Introduzione

Si è già parlato più volte nei precedenti capitoli di operazioni di filtraggio numerico a una e due dimensioni per l'elaborazione di dati campionati. In particolare nel capitolo 4 sono state impostate le proprietà generali dei sistemi 2D discreti o numerici, definendone il comportamento nel dominio spaziale (indici $n_1$, $n_2$ corrispondenti agli assi $x$ e $y$) e nel dominio frequenziale ($\nu_x$, $\nu_y$ oppure $\omega_x$, $\omega_y$). Nel capitolo 6 sono state considerate alcune elaborazioni locali spaziali, corrispondenti a operazioni di filtraggio numerico passa-basso o passa-alto (§§ 6.6 e 6.7).

In questo capitolo vengono presentati i metodi di progetto e le proprietà dei filtri numerici 1D, che possono essere applicati alla elaborazione dei segnali e delle immagini campionate per righe e colonne, e poi dei filtri numerici 2D più adeguati a un'elaborazione completa delle immagini stesse.

## 7.2 Filtri numerici unidimensionali

E' utile prima descrivere alcuni filtri numerici 1D, sia perché essi – come sopra osservato – possono essere applicati all'elaborazione numerica dei segnali e delle immagini per righe e colonne, sia perché molti filtri numerici 2D si ottengono come estensione o trasformazione di filtri numerici 1D.

In accordo con quanto indicato nell'Introduzione, un sistema discreto (in particolare un filtro numerico) 1D può essere descritto in modo assai generale dalla relazione (vedi anche la [1.75] (Cappellini, Constantinides, Emiliani, 1978):[1]

$$g(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a(k) f(n-k) - \sum_{k=1}^{M-1} b(k) g(n-k) \qquad [7.1]$$

[1] I dati $f(n)$ e $g(n)$ corrispondono in genere a dati campionati: $f(n) = f(nT_C)$, $g(n) = g(nT_C)$, essendo $T_C$ il passo di campionamento scelto con il relativo teorema (§ 1.3.1).

ove $f(n)$ è la sequenza 1D di dati di ingresso, $g(n)$ è la sequenza di dati di uscita, $a(k)$ e $b(k)$ sono le sequenze dei coefficienti che definiscono la funzione di trasferimento del sistema o filtro numerico.

Effettuando la trasformata $z$ 1D della relazione [7.1], si ottiene agevolmente la funzione di trasferimento $H(z)$:

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{N-1} a(k)z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{M-1} b(k)z^{-k}}. \qquad [7.2]$$

Ponendo:

$$z=e^{j\omega} \qquad [7.3]$$

con le considerazioni del paragrafo I.4.1, si ottiene la risposta in frequenza $H(\omega)$:

$$H(\omega)=\frac{\sum_{k=0}^{N-1} a(k)e^{-jk\omega}}{1+\sum_{k=1}^{M-1} b(k)e^{-jk\omega}}. \qquad [7.4]$$

Analogamente, i sistemi o filtri precedenti sono detti *ricorsivi* o *ricorrenti* se hanno una risposta impulsiva $h(n)$ o $h(k)$ infinita (IIR), mentre sono detti non ricorsivi o non ricorrenti se hanno una risposta impulsiva $h(k)$ finita (FIR). Questi ultimi sono espressi dalle relazioni precedenti, ove siano tutti i $b(k)=0$: si abbia cioè una sola sommatoria, relativa ai coefficienti di filtraggio diretto $a(k)$.

Descriviamo di seguito sinteticamente alcuni dei più importanti metodi di progetto di filtri numerici 1D.

### 7.2.1 Filtri numerici 1D FIR che usano funzioni 'finestra'

La relazione [7.1] diviene, per un filtro numerico 1D FIR:

$$g(n)=\sum_{k=0}^{N-1} a(k)f(n-k) \qquad [7.5]$$

e la sua risposta in frequenza è espressa da:

$$H(\omega)=\sum_{k=0}^{N-1} a(k)e^{-jk\omega}. \qquad [7.6]$$

Il metodo di progetto delle cosiddette funzioni "finestra" nasce dalla considerazione che la relazione [7.6] può essere interpretata come una serie di Fourier troncata (vedi anche § 4.4), che pertanto presenta fluttuazioni od oscillazioni ben note, dette di Gibbs, per ridurre le quali è utile introdurre appunto opportune funzioni di peso o

moltiplicative dei coefficienti $a(k)$. Queste "funzioni finestra" (*window functions*), in genere simmetriche, hanno un'efficienza tanto maggiore quanto più hanno una rappresentazione in frequenza (o spettro) concentrata, cioè con una larghezza minima del lobo principale e area minima al di sotto dei lobi laterali (Cappellini, Constantinides, Emiliani, 1978). Tali funzioni, peraltro, sono utili per altri problemi di correzione o pesatura (quali ad esempio nel progetto di antenne con una certa apertura spaziale di cui si voglia migliorare il diagramma di radiazione, o nella definizione di metodi di stima spettrale). Sono state introdotte e definite molte funzioni finestra, di seguito presentate nella forma non causale.

Alcune di queste funzioni sono state proposte e usate per le stime spettrali, come la funzione di Hanning:

$$w(k)=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2\pi k}{N-1}\right), \qquad k=-\frac{N-1}{2},\dots,\frac{N-1}{2} \tag{7.7}$$

quella di Hamming:

$$w(k)=0{,}54+0{,}46\cos\left(\frac{2\pi k}{N-1}\right) \qquad k=-\frac{N-1}{2},\dots,\frac{N-1}{2} \tag{7.8}$$

oppure quella di Blackman:

$$w(k)=0{,}42+0{,}5\cos\left(\frac{2\pi k}{N-1}\right)+0{,}08\cos\left(\frac{4\pi k}{N-1}\right) \tag{7.9}$$

che hanno espressione semplice e moderata efficienza.

Altre funzioni sono state definite da studi sulle serie di Fourier. Una di queste (funzione di Fejer) ha la seguente forma, molto semplice:

$$w_F(k)=1-\left|\frac{2k}{N-1}\right| \qquad k=-\frac{N-1}{2},\dots,\frac{N-1}{2} \tag{7.10}$$

mentre un'altra (funzione di Lanczos) ha l'espressione:

$$w_L(k)=\left[\frac{\sin\frac{2k\pi}{N-1}}{\frac{2k\pi}{N-1}}\right]^L \qquad k=-\frac{N-1}{2},\dots,\frac{N-1}{2} \tag{7.11}$$

ove $L$ è un numero intero positivo. Questa funzione è stata opportunamente estesa (Cappellini, 1969), usando al posto di $L$ ogni numero $m$ positivo, ottenendo una funzione ancora semplice con un parametro $m$ utile per aggiustare la funzione ai diversi progetti.

Altre funzioni sono state definite in accordo a criteri di ottimalità, come la funzione di Dolph-Čebyšev, la funzione di Kaiser, la funzione di Cappellini, la funzione di Papoulis (Cappellini, Constantinides, Emiliani, 1978).

Tabella 7.1 Valori dei coefficienti della funzione "finestra" di Cappellini nell'intervallo continuo $0 < kT < 1{,}5$ (con possibilità di sostituire a $k$ il valore $\gamma k$, essendo $\gamma$ un fattore positivo di espansione o concentrazione)

| $0 < kT < 0{,}75$ | $0{,}75 < kT < 1{,}5$ |
|---|---|
| $a = 0{,}828217$ | $a = 0{,}065062$ |
| $b = -1{,}637363$ | $b = 0{,}372793$ |
| $c = 0{,}041186$ | $c = -1{,}701521$ |
| $d = 0{,}99938$ | $d = 1{,}496611$ |

La funzione di Dolph-Čebyšev ha un'espressione in frequenza:

$$W_D(\omega) = \frac{\cos[(N-1)\cos^{-1}(\alpha \cos(\omega X/2))]}{\cosh[(N-1)\cosh^{-1}(\alpha)]} \qquad [7.12]$$

ove $\alpha$ è un numero positivo e $X = T_c$ è il passo di campionamento.

La funzione di Kaiser è ottenuta, minimizzando le relazioni di indeterminazione (relazione di Heisenberg), come approssimazione delle funzioni di Landau, Slepian e Pollack (Kaiser, 1966) e ha la forma:[2]

$$w_K(k) = \frac{I_0\{\omega_a[(N-1)/2]X\sqrt{1-[2k/(N-1)]^2}\}}{I_0\{\omega_a[(N-1)/2]X\}} \qquad [7.13]$$

ove $I_0$ è la funzione di Bessel modificata di prima specie e ordine zero e $\omega_a$ è un numero positivo.

La funzione di Cappellini (Borchi, Cappellini, Emiliani, 1975; Cappellini, 1978), pure derivata minimizzando le relazioni di indeterminazione, approssima un'espressione con funzioni di Weber e ha la forma assai semplice seguente:

$$w_C(k) = ak^3 + bk^2 + ck + d \qquad [7.14]$$

essendo $a, b, c$ e $d$ costanti tabulate (tab. 7.1).

La funzione di Papoulis ha l'espressione (da criteri di ottimizzazione delle stime spettrali):

$$w_P(k) = \frac{1}{\pi}\left|\sin\left(\frac{2k\pi}{N-1}\right)\right| + \; 2\frac{|k|}{N-1}\cos\left(\frac{2k\pi}{N-1}\right). \qquad [7.15]$$

La figura 7.1 mostra l'andamento continuo in funzione di $t/\tau$ ($t/\tau$ corrispondendo a $2k/(N-1)$) di alcune delle funzioni finestra sopra presentate, che in genere hanno una forma del tipo a campana.

La figura 7.2 mostra la risposta in frequenza ($\lambda = \omega/\omega_t$, essendo $\omega_t$ la pulsazione di taglio) di un filtro numerico 1D passa-basso (che cioè fa passare le basse frequenze ed elimina le alte) progettato mediante la relazione [7.6] ove i coefficienti $a(k)$ sono

[2] Gli stessi limiti delle relazioni [7.7]-[7.11] valgono per questa funzione e per le seguenti.

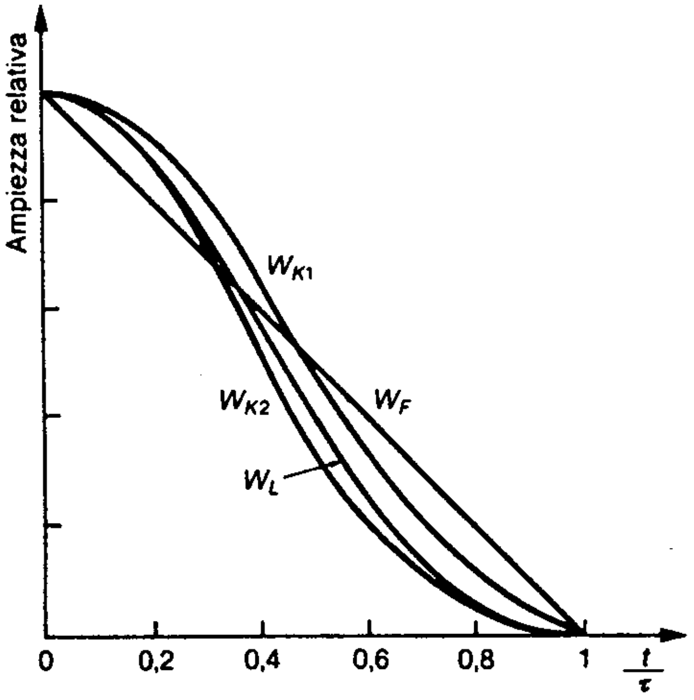



**Figura 7.1**
Andamento di alcune funzioni "finestra" (è mostrata solo la parte per $t/\tau > 0$, essendo perfettamente simmetrica la parte per $t/\tau < 0$): $w_F(t/\tau)$, funzione di Fejer: $w_L(t/\tau)$, funzione di Lanczos con $L = 2$; $w_{K_1}(t/\tau)$ e $w_{K_2}(t/\tau)$, funzioni di Kaiser, rispettivamente con $\omega_a[(N-1)/2]X$ uguale a 6 e 8,5.

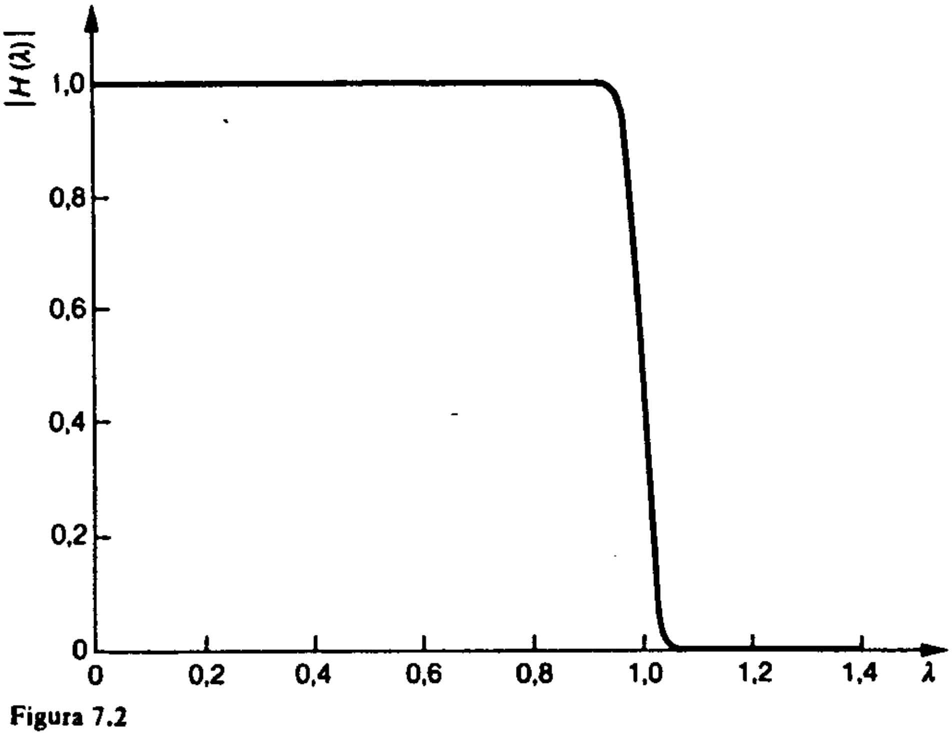



**Figura 7.2**
Risposta in frequenza (modulo) di un filtro numerico 1D passa-basso del tipo FIR che usa la funzione finestra di Lanczos con $N = 50$; $\omega_c/\omega_t = 3{,}2$ (essendo $\omega_c$ e $\omega_t$ rispettivamente la pulsazione di campionamento e di taglio), $L = 2$.

Tabella 7.2 Coefficienti di un filtro numerico 1D passa-basso del tipo FIR che usa la funzione finestra di Lanczos con $N=39$, $\lambda_c=\omega_c/\omega_t=f_c/f_t=4$ (essendo $f_c$ e $f_t$ rispettivamente la frequenza di campionamento e di taglio), $L=2$. Si ha simmetria rispetto ad $a(19)$ e risultano nulli 19 coefficienti

| |
|---|
| $a(0)=a(38)=0{,}00000$ |
| $a(2)=a(36)=0{,}00024$ |
| $a(4)=a(34)=-0{,}00130$ |
| $a(6)=a(32)=0{,}00371$ |
| $a(8)=a(30)=-0{,}00822$ |
| $a(10)=a(28)=0{,}01586$ |
| $a(12)=a(26)=-0{,}02846$ |
| $a(14)=a(24)=0{,}05041$ |
| $a(16)=a(22)=-0{,}09768$ |
| $a(18)=a(20)=0{,}31541$ |
| $a(19)=0{,}50000$ |

stati moltiplicati per la funzione di Lanczos $w_L$. Per mostrare come questa tecnica sia effettivamente semplice nell'impiego pratico, la tabella 7.2 riporta i valori completi dei coefficienti, che definiscono un filtro numerico passa-basso (con la frequenza di taglio $f_t$ normalizzata, e quindi con possibilità di impiego per qualunque valore di frequenza assoluta) (Cappellini e altri, 1968).

### 7.2.2 Filtri numerici con campionamento in frequenza

Con questa tecnica di progetto si parte con il definire i campioni della risposta in frequenza desiderata (si impongono cioè dei valori nel dominio delle frequenze per cui deve passare la risposta voluta). Indicando con $H(m)$ questi campioni della risposta in frequenza, la corrispondente funzione impulsiva campionata può essere espressa nella forma (trasformata di Fourier discreta inversa):

$$h(k)=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} H(m)\,e^{j\frac{2km\pi}{N}} \qquad [7.16]$$

avendo utilizzato un numero totale pari a $N$ di campioni $H(m)$.

Si può mostrare (Cappellini, Constantinides, Emiliani, 1978) che la risposta in frequenza risulta espressa da:

$$H(\omega)=\frac{e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{H(m)\,e^{-j\frac{m\pi}{N}}\sin[(N\omega)/2]}{\sin[\omega/2-(m\pi)/N]} \qquad [7.17]$$

che può anche interpretarsi come risposta in frequenza di un filtro non ricorrente FIR in cascata con la combinazione parallela di $N$ filtri ricorrenti IIR.

In pratica nel progetto vengono modificati i valori dei coefficienti $h(k)$ ([7.16]) con criteri di ottimizzazione (programmazione lineare) per migliorare la risposta in frequenza.

### 7.2.3 Filtri numerici definiti con criteri di ottimizzazione

Già nel metodo precedente si è accennato all'uso di criteri di ottimizzazione per il progetto di filtri numerici 1D. Più in generale, volendo una funzione di risposta in frequenza desiderata $D(\omega)$ ed essendo $H(\omega)$ una funzione di approssimazione di essa, si può definire una funzione errore $E(\omega)$:

$$E(\omega)=|W(\omega)[D(\omega)-H(\omega)]| \qquad [7.18]$$

ove $W(\omega)$ è una funzione peso positiva. I criteri di ottimizzazione (ad esempio il criterio di Čebyšev) sono in genere definiti per minimizzare l'errore massimo $E(\omega)$ della [7.18].

### 7.2.4 Filtri numerici 1D ricorrenti IIR

Sono noti molti metodi di progetto di filtri numerici 1D ricorrenti IIR. Per questi filtri, data la reazione implicita nell'elaborazione (che utilizza anche dati di uscita), occorre (vedi anche § 4.6) porre attenzione ai problemi di stabilità, cioè assicurarsi che il filtro IIR sia stabile (analisi del polinomio a denominatore nella [7.2] ed esame della posizione delle sue radici o poli che devono trovarsi all'interno del cerchio unitario del piano $z$).

Diversi metodi di progetto partono dalla conoscenza o definizione del filtro continuo desiderato ed effettuano opportune trasformazioni nel dominio della variabile $z$. Una delle trasformazioni più note e importanti è la cosiddetta trasformazione bilineare, definita dalla relazione:

$$p \rightarrow K\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \qquad [7.19]$$

ove $K$ è una costante reale positiva. Tale trasformazione fa corrispondere all'asse $\omega'$ delle frequenze angolari del campo continuo l'asse $\omega$ delle frequenze angolari del campo discreto in $z$, con il seguente legame:

$$\omega' = K \operatorname{tg}\frac{\omega X}{2}. \qquad [7.20]$$

Sono state definite anche apposite trasformazioni in frequenza (Constantinides, 1970) che permettono agevolmente di passare da un certo filtro numerico (ad esempio passa-basso) ad altri (ad esempio passa-alto, passa banda...).

Anche per i filtri 1D IIR possono essere usate tecniche di progetto di ottimizzazione del tipo indicato per i filtri 1D FIR. Di particolare interesse sono i filtri, ottimi sotto diversi aspetti, del tipo di Butterworth, di Čebyšev e i filtri ellittici (Cappellini, Constantinides, Emiliani, 1978).

Dopo questa rapida rassegna dei diversi tipi di filtri numerici 1D, presentiamo nei paragrafi seguenti i più importanti tipi di filtri numerici 2D, in buona parte connessi ai corrispondenti filtri 1D.

### 7.3 Filtri numerici bidimensionali FIR che usano funzioni 'finestra'

Come già indicato nel paragrafo 4.5, un sistema discreto o filtro 2D non ricorrente FIR è definito dalla relazione nel dominio spaziale (vedi § 4.3 e la [4.31]):

$$g(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} a(k_1, k_2) f(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \qquad [7.21]$$

ove $f(n_1, n_2)$ sono i dati di ingresso (campioni dell'immagine da elaborare), $g(n_1, n_2)$ sono i dati di uscita (campioni dell'immagine elaborata), $a(k_1, k_2)$ sono i coefficienti che definiscono la funzione di trasferimento del sistema o filtro.

La corrispondente funzione di trasferimento in frequenza $H(\omega_1, \omega_2)$ risulta essere espressa da:

$$H(\omega_1, \omega_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} a(k_1, k_2) e^{-j(k_1 \omega_x + k_2 \omega_y)} \qquad [7.22]$$

in accordo anche con le relazioni [4.22] e [4.23].

Considerando, come nel caso 1D, la relazione [7.22] come una serie di Fourier troncata, per ridurre le oscillazioni di Gibbs si ricorre alle funzioni finestra 2D (Cappellini, Constantinides, Emiliani, 1978).

In pratica ciò corrisponde a moltiplicare i campioni della risposta impulsiva $h(k_1, k_2)$ per i campioni $w(k_1, k_2)$ di un'opportuna funzione definita zero al di fuori della regione di interesse. Con $N_1$ e $N_2$ dispari, i coefficienti $a(k_1, k_2)$ risultano così espressi da:

$$a(k_1, k_2) = h(k_1, k_2) w(k_1, k_2) \qquad [7.23]$$

con

$$k_1 = -\frac{N_1 - 1}{2}, \ldots, \frac{N_1 - 1}{2}$$

$$k_2 = -\frac{N_2 - 1}{2}, \ldots, \frac{N_2 - 1}{2}$$

mentre la risposta in frequenza è uguale alla convoluzione fra $H(\omega_x, \omega_y)$ e $W(\omega_x, \omega_y)$:

$$H_M(\omega_x, \omega_y) = H(\omega_x, \omega_y) \circledast W(\omega_x, \omega_y). \qquad [7.24]$$

Abbiamo già indicato molte funzioni finestra 1D per il progetto di filtri numerici 1D FIR. E' stato dimostrato (Huang, 1972) che se $w(t)$ è una buona "finestra" continua nel caso 1D (con la sua trasformata $W(\omega)$, "stretta" o concentrata in confronto alle bande dei filtri da realizzare), allora la finestra 2D circolarmente simmetrica che si ottiene ruotando $w(t)$, cioè tale che:

$$w(x, y) = w\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \qquad [7.25]$$

è una buona "finestra" nel caso 2D. In questo modo tutte le funzioni 1D possono essere immediatamente usate per il progetto di filtri numerici 2D FIR.

E' utile osservare che l'uso di una funzione a simmetria circolare del tipo [7.25] è in genere assai preferibile all'applicazione prima per righe e poi per colonne di funzioni 1D (forma "rettangolare") corrispondente a:

$$w(x,y)=w(x)w(y) \qquad [7.26]$$

in quanto nella maggior parte delle elaborazioni di immagini non sono da privilegiarsi direzioni particolari, ma è più conveniente un'elaborazione a simmetria circolare.

Fra le varie funzioni finestra esaminate (§ 7.2), sono da sottolineare le funzioni: estensione di Lanczos $w_L(k_1, k_2)$, funzione di Kaiser $w_K(k_1, k_2)$ e funzione di Cappellini. Ad esempio la funzione 2D di Kaiser (in forma campionata, vedi [7.13]) risulta:

$$w_K(k_1,k_2)=\frac{I_0\left(\omega_a N_a X\sqrt{1-\dfrac{k_1^2+k_2^2}{N_a^2}}\right)}{I_0(\omega_a N_a X)} \qquad [7.27]$$

con $k_1, k_2=0,\dots, N_a$, dove $N_a=(N-1)/2$ (definizione nel primo quadrante, gli altri tre quadranti essendo ricavabili per simmetria, data la rotazione circolare della funzione).

Per mostrare la relativa semplicità di progetto di filtri 2D FIR con le funzioni finestra, consideriamo ad esempio il progetto di un filtro passa-basso circolarmente simmetrico, approssimazione del filtro ideale definito dalla relazione:

$$H(\omega_x,\omega_y)=\begin{cases}1 & \text{per} \quad \sqrt{\omega_x^2+\omega_y^2}<\omega_t\\ 0 & \text{per} \quad \sqrt{\omega_x^2+\omega_y^2}>\omega_t.\end{cases} \qquad [7.28]$$

Come antitrasformata di Fourier 2D continua della [7.28] (vedi § 1.2), si ottiene:

$$h(x,y)=\frac{\omega_t}{2\pi}\,\frac{J_1(\omega_t\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad [7.29]$$

ove $J_1$ è la funzione di Bessel di prima specie di ordine uno. Campionando la [7.29] su un reticolo quadrato di passo $X$ (scelto in base all'immagine da elaborare; vedi § 3.2), si ottiene (tenendo conto anche di un fattore $X^2/2$ nel passaggio dalla convoluzione continua a quella discreta):

$$h(k_1,k_2)=\frac{\alpha}{2}\,\frac{J_1(2\pi\alpha\sqrt{k_1^2+k_2^2})}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}} \qquad [7.30]$$

essendo $\alpha=f_t X$.

In questo caso valgono le condizioni di simmetria:

$$h(k_1,k_2)=h(N_1-1-k_1,k_2)=h(k_1,N_2-1-k_2) \qquad [7.31]$$

e la risposta in frequenza del filtro numerico 2D FIR con fase lineare risulta espressa da (con $N_1 = N_2 = N =$ intero pari):

$$H(\omega_x, \omega_y) = e^{-j\omega_x\left(\frac{N-1}{2}\right)} e^{-j\omega_y\left(\frac{N-1}{2}\right)} 4 \sum_{k_1=0}^{N/2-1} \sum_{k_2=0}^{N/2-1} h(k_1, k_2) w(k_1, k_2) \cdot \cos\left[\left(\frac{N-1}{2} - k_1\right)\omega_x\right] \cdot \cos\left[\left(\frac{N-1}{2} - k_2\right)\omega_y\right]. \quad [7.32]$$

In pratica per ottenere il filtro 2D FIR passa-basso approssimazione di quello tronco di cilindro ideale della [7.28], basta inserire nella relazione [7.32] la funzione finestra $w(k_1, k_2)$ preferita.

Anche nel caso 2D, risultano avere efficienza maggiore filtri di questo tipo progettati con le due finestre (confrontabili fra loro con piccole differenze) di Kaiser e di Cappellini (essendo i filtri con la finestra Cappellini di efficienza superiore quando non si richiedano pendenze al taglio molto elevate e notevoli livelli di attenuazione fuori banda). Nella tabella 7.3 sono riportati i valori della massima fluttuazione in banda ($\delta_1$), della massima fluttuazione fuori banda ($\delta_2$) e della banda di transizione

**Tabella 7.3** Valori delle massime fluttuazioni in banda ($\delta_1$) e fuori banda ($\delta_2$) e della banda di transizione media $\Delta B_n$ in scala normalizzata ($\omega/\omega_c$) per alcuni filtri numerici 2D FIR progettati con il metodo delle finestre spettrali ($\alpha = 1/4$, $N = 16$)

| Tipo di correzione | Valore del parametro | $\delta_1$(dB) | $\delta_2$(dB) | $\Delta B_n$ |
|---|---|---|---|---|
| Nessuna | 0 | −16,94 | −19,89 | 0,046 |
| Estensione di Lanczos | 0,2 | −19,85 | −22,89 | 0,058 |
| | 0,4 | −22,33 | −26,01 | 0,069 |
| | 0,6 | −24,74 | −29,12 | 0,082 |
| | 0,8 | −27,33 | −32,35 | 0,094 |
| | 1 | −29,82 | −35,24 | 0,107 |
| | 1,2 | −32,42 | −38,09 | 0,120 |
| | 1,4 | −35,20 | −41,52 | 0,134 |
| | 1,6 | −38,19 | −44,79 | 0,148 |
| | 1,8 | −41,40 | −48,36 | 0,164 |
| | 2 | −44,85 | −52,43 | 0,180 |
| Kaiser | 1 | −18,62 | −21,56 | 0,053 |
| | 2 | −22,13 | −25,77 | 0,069 |
| | 3 | −25,95 | −31,04 | 0,088 |
| | 4 | −29,53 | −36,04 | 0,107 |
| | 5 | −32,99 | −41,17 | 0,129 |
| | 6 | −36,71 | −47,76 | 0,152 |
| | 7 | −40,68 | −53,64 | 0,179 |
| | 8 | −44,89 | −58,35 | 0,210 |
| | 9 | −49,31 | −62,99 | 0,238 |
| Cappellini | 0,5 | −22,22 | −26,00 | 0,069 |
| | 0,6 | −24,49 | −29,21 | 0,080 |
| | 0,8 | −30,61 | −38,01 | 0,113 |
| | 1 | −37,64 | −49,66 | 0,163 |

media $\Delta B_n$ (tenendo conto della non perfetta simmetria circolare)[3] di filtri numerici 2D FIR (con $\alpha = 1/4, N = 16$) progettati con nessuna finestra, con quella estensione di Lanczos e con quelle di Kaiser e di Cappellini (Calzini, Cappellini, Emiliani, 1975).

## 7.4 Filtri numerici bidimensionali con campionamento in frequenza

In analogia a quanto indicato nel paragrafo 7.2, nel progetto di filtri numerici 2D con campionamento in frequenza si parte col definire i campioni della risposta in frequenza desiderata. Indicando con $H(m_1, m_2)$ questi campioni, si può trovare la risposta impulsiva campionata $h(k_1, k_2)$ mediante la trasformata discreta 2D di Fourier inversa (vedi § 5.3):

$$h(k_1, k_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} H(m_1, m_2) e^{j2\pi\left(\frac{k_1 m_1}{N_1} + \frac{k_2 m_2}{N_2}\right)} \qquad [7.33]$$

ammettendo di utilizzare una matrice di $N_1 \cdot N_2$ campioni della risposta in frequenza $H(m_1, m_2)$ e di avere $k_1$ e $k_2$ definiti nel campo rettangolare $(N_1, N_2)$.

Sostituendo ora la relazione [7.33] nella [7.22] al posto dei coefficienti $a(k_1, k_2)$, si ottiene:

$$H(\omega_x, \omega_y) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \left[ \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} H(m_1, m_2) e^{j2\pi\left(\frac{k_1 m_1}{N_1} + \frac{k_2 m_2}{N_2}\right)} \right] \cdot$$
$$\cdot e^{-j(k_1 \omega_x + k_2 \omega_y)}. \qquad [7.34]$$

La relazione precedente costituisce la base per il progetto di filtri numerici 2D con la tecnica del campionamento in frequenza. La risposta in frequenza $H(\omega_x, \omega_y)$ [7.34] è tale da essere uguale ai campioni imposti $H(m_1, m_2)$ nei valori campionati in frequenza, mentre in genere oscilla nell'intervallo fra i valori stessi. E' necessario pertanto, anche in questo caso (come in quello 1D), modificare opportunamente i campioni della risposta impulsiva $h(k_1, k_2)$ espressi dalla [7.33], in modo da diminuire l'ampiezza delle oscillazioni. Questo viene in genere ottenuto con metodi che si basano sull'osservazione che la risposta in frequenza interpolata [7.34] è una funzione lineare dei campioni imposti e che quindi la minimizzazione dell'errore fuori banda e in banda può essere ottenuta con tecniche di programmazione lineare (Cappellini, Constantinides, Emiliani, 1978).

La tabella 7.4 riporta i valori numerici dei parametri di un filtro numerico 2D con $N_1 = N_2 = 16$; $R_1$ individua la banda passante (ove i campioni hanno valore 1), $R_2$ definisce la banda di transizione (al di là della quale i campioni hanno valore 0).

[3] Si definisce banda di transizione $\Delta B_n$ l'intervallo in cui il modulo della risposta in frequenza passa da $1 - \delta_1$ a $+ \delta_2$.

Tabella 7.4 Valori delle massime fluttuazioni in banda ($\delta_1$) e fuori banda ($\delta_2$) e della banda di transizione media $\Delta B_n$ (in scala normalizzata $\omega/\omega_c$) per due filtri numerici 2D definiti con il metodo del campionamento in frequenza (la prima e la terza riga corrispondono ai due filtri prima della ottimizzazione)

| $R_1$ | $R_2$ | $\delta_1$(dB) | $\delta_2$(dB) | $\Delta B_n$ |
|---|---|---|---|---|
| 3,3 | 4,2 | −16,58 | −12,67 | 0,031 |
| 3,3 | 4,2 | −23,68 | −29,05 | 0,083 |
| 4,3 | 5,3 | −15,74 | −12,90 | 0,031 |
| 4,3 | 5,3 | −22,41 | −29,16 | 0,084 |

## 7.5 Filtri numerici bidimensionali FIR ottenuti con trasformazione da filtri unidimensionali

Se $H(\omega)$ è la risposta in frequenza di un filtro numerico 1D FIR, con una trasformazione di variabili del tipo

$$\cos\omega = A\cos\omega_x + B\cos\omega_y + C\cos\omega_x\cos\omega_y + D \qquad [7.35]$$

con $A, B, C, D$ reali, si può ottenere la risposta in frequenza $H(\omega_x, \omega_y)$ di un filtro numerico 2D FIR (espressa da una relazione del tipo [7.22]).

Con un'opportuna scelta del valore dei coefficienti $A, B, C, D$ (McClellan, 1973) di seguito indicata:

$$A = B = C = -D = \frac{1}{2} \qquad [7.36]$$

si ottengono filtri 2D a simmetria pressoché circolare: l'approssimazione è molto buona per i piccoli valori di $\omega_r = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$, mentre tende a una forma quadrata al crescere di $\omega_r$.

Per molti filtri numerici 2D di pratico interesse, l'approssimazione è adeguata e il metodo di progetto risulta globalmente non molto complesso, assicurando una buona efficienza.

## 7.6 Filtri numerici bidimensionali IIR

Le relazioni generali che definiscono un filtro numerico 2D ricorrente IIR sono quelle già indicate nel paragrafo 4.5 ([4.30] e [4.33]).

Per progettare un filtro di questo tipo, occorre definire i coefficienti $a(k_1, k_2)$ e $b(k_1, k_2)$ in modo tale da approssimare la funzione di trasferimento desiderata con una realizzazione ricorsiva stabile. Come già osservato (§ 4.6), la stabilità rappresenta in effetti uno specifico problema delle strutture ricorrenti, con le maggiori difficoltà nel caso 2D connesse al fatto che non è in genere possibile espandere in frazioni o fattori parziali (o, come si dice, "fattorizzare") una funzione di trasferimento di due variabili $(z_1, z_2)$ quale quella indicata dalla [4.30].

Un metodo di progetto proposto si basa sull'uso di trasformazioni spettrali dal dominio 1D a quello 2D (Shanks, Treitel, Justice, 1972), ottenendo filtri 2D ruotati. Considerando un filtro 1D continuo con risposta:

$$H_1(p)=H_0\left[\prod_{i=1}^{m}(p-q_i)/\prod_{i=1}^{n}(p-p_i)\right] \qquad [7.37]$$

ove $H_0$ è un fattore di scala costante e $q_i, p_i$ sono i valori degli zeri e dei poli (se complessi con il valore coniugato presente nel corrispondente prodotto), con frequenza angolare di taglio ammessa unitaria, il filtro stesso può essere visto come un filtro 2D che varia solo in una dimensione del tipo:

$$H_2(p_1,p_2)=H_1(p_2)=H_0\left[\prod_{i=1}^{m}(p_2-q_i)/\prod_{i=1}^{n}(p_2-p_i)\right]. \qquad [7.38]$$

Ruotando in senso orario l'asse $(p_1,p_2)$ di un angolo $\beta$ mediante la trasformazione:

$$\begin{aligned} p_1 &= p'_1\cos\beta+p'_2\sin\beta \\ p_2 &= -p'_1\sin\beta+p'_2\cos\beta \end{aligned} \qquad [7.39]$$

si ottiene un filtro la cui risposta in frequenza (ruotata di un angolo $-\beta$ rispetto alla risposta indicata dalla [7.38]) è espressa da:

$$H_2(p'_1,p'_2)=H_0\frac{\prod_{i=1}^{m}[(p'_2\cos\beta-p'_1\sin\beta)-q_i]}{\prod_{i=1}^{n}[(p'_2\cos\beta-p'_1\sin\beta)-p_i]} \qquad [7.40]$$

che descrive un filtro continuo 2D nel nuovo sistema di coordinate $p'_1$ e $p'_2$. La forma numerica di questo filtro può essere ottenuta mediante l'uso della trasformazione bilineare 2D (vedi la [7.19]) seguente:

$$\begin{aligned} p'_1 &= \frac{1-z_1}{1+z_1} \\ p'_2 &= \frac{1-z_2}{1+z_2} \end{aligned} \qquad [7.41]$$

che permette di passare dalla $H_2(p'_1,p'_2)$ alla $H(z_1,z_2)$. Questa tecnica ha il problema di non garantire la stabilità del filtro progettato.

Una modifica di questa tecnica (Costa, Venetsanopoulos, 1974) permette di definire un certo numero di filtri ruotati, uniformemente distribuiti, tali da approssimare la forma circolare con una poligonale. Il filtro globale risultante è stabile, se sono soddisfatte condizioni abbastanza facili.

Un altro metodo (Ahmadi, Constantinides, King, 1976) fa uso della seguente fun-

zione:

$$f(p_1, p_2) = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2}{1 + b p_1 p_2} \quad [7.42]$$

applicata come trasformazione a un filtro 1D passa-basso del tipo:

$$H(p) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{p + B_i} \quad [7.43]$$

per ottenere un filtro 2D ricorrente nel primo quadrante. Filtri nel secondo, terzo e quarto quadrante sono ottenuti con la stessa trasformazione, ma sostituendo $p_2$ con $-p_2$ per il secondo, $p_1$ con $-p_1$ e $p_2$ con $-p_2$ per il terzo e $p_1$ con $-p_1$ per il quarto quadrante. Queste quattro sezioni a un quadrante sono poste in cascata e viene usata la trasformazione bilineare 2D [7.41] per ottenere il filtro numerico 2D IIR corrispondente. Il filtro ottenuto risulta stabile.

Un'altra tecnica di progetto si basa sull'ottimizzazione di parametri (Maria, Fahmy, 1974) per approssimare una determinata risposta in frequenza con criteri di minimizzazione degli errori (*minimum p-error technique*).

Un metodo di progetto assai generale, recentemente definito, usa un'ottimizzazione non lineare per minimizzare la funzione errore, nella quale è presente la differenza (o "distanza") fra la risposta in frequenza desiderata e quella corrispondente a una realizzazione stabile (ottenuta mediante tecniche basate sulla scomposizione del *cepstrum*, vedi § 4.6) (Ekstrom, Twogood, Woods, 1980). Il metodo ha il vantaggio di permettere un controllo contemporaneo dell'approssimazione in frequenza del filtro e della sua stabilità, ma presenta una complessità non lieve nell'applicazione pratica.

Un metodo, per alcuni aspetti connesso a quest'ultimo indicato, che permette di progettare filtri con buona efficienza e presenta una più moderata complessità, è illustrato più in dettaglio di seguito: si basa su trasformazioni della funzione modulo quadro di un filtro numerico 1D in campo 2D, utilizzando un'opportuna scomposizione in 4 filtri stabili (Bernabò, Cappellini, Emiliani, 1976).

Come già indicato nel paragrafo 4.5, un filtro numerico 2D, espresso da una relazione del tipo [4.30], avente risposta impulsiva $h_1(k_1, k_2)$ diversa da zero solo per $k_1 \geqslant 0$ e $k_2 \geqslant 0$, è detto filtro nel primo quadrante; se $H_1(z_1, z_2)$ è la sua funzione di trasferimento, si possono facilmente definire i corrispondenti filtri nel secondo, terzo e quarto quadrante mediante le relazioni:

$$h_1(k_1, k_2) = h_2(k_1, -k_2) = h_3(-k_1, -k_2) = h_4(-k_1, k_2) \quad [7.44]$$

con funzioni di trasferimento:

$$H_1(z_1, z_2) = H_2(z_1, z_2^{-1}) = H_3(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = H_4(z_1^{-1}, z_2). \quad [7.45]$$

La cascata di questi 4 filtri è un filtro con fase zero, la cui risposta in frequenza $H_s(\omega_x, \omega_y)$ è definita dai coefficienti determinati attraverso la convoluzione dei

coefficienti dei 4 filtri (Cappellini, Constantinides, Emiliani, 1978). Una risposta in frequenza di questo tipo può essere ottenuta attraverso una trasformazione del dominio 1D, in particolare partendo da un filtro numerico 1D IIR, la cui risposta in frequenza ha un modulo al quadrato espresso da:

$$|H(\omega)|^2 = G(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} p(k)\cos(k\omega)}{\sum_{k=0}^{M-1} q(k)\cos(k\omega)} \qquad [7.46]$$

ove $p(k)$ e $q(k)$ sono facilmente ottenuti mediante la convoluzione dei coefficienti dei polinomi al numeratore e denominatore di $H(\omega)$.

Il modulo quadrato della risposta in frequenza di un filtro 2D ricorrente può ora essere ottenuto mediante la trasformazione di McClellan (vedi § 7.5) applicata al numeratore e denominatore della [7.46], ottenendo:

$$G(\omega_x, \omega_y) = \frac{\sum_{k_1=0}^{N-1}\sum_{k_2=0}^{N-1} p(k_1,k_2)\cos(k_1\omega_x)\cos(k_2\omega_y)}{\sum_{k_1=0}^{M-1}\sum_{\substack{k_2=0 \\ k_1+k_2\neq 0}}^{M-1} q(k_1,k_2)\cos(k_1\omega_x)\cos(k_2\omega_y)}. \qquad [7.47]$$

Il modulo quadrato ottenuto deve essere fattorizzato per ottenere filtri ricorrenti stabili: in particolare possono essere ottenuti 4 filtri nei vari quadranti, come sopra indicato, utilizzando le proprietà del *cepstrum* (vedi § 4.6). In questo procedimento nascono errori di troncamento e conseguenti oscillazioni, che possono essere ridotte mediante l'uso di funzioni finestra. Oltre alle funzioni già esaminate (§ 7.2), risulta utile una funzione finestra del tipo gaussiano, della forma:

$$w_g(k_1,k_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(k_1^2+k_2^2)}. \qquad [7.48]$$

Alcuni esempi di filtri numerici 2D progettati con questo metodo sono mostrati nella figura 7.3, mentre la tabella 7.5 riporta i valori dei parametri più significativi.

**Tabella 7.5** Parametri dei filtri numerici 2D IIR, costituiti dalla cascata di un filtro 2D FIR (di ordine $N \cdot N$) e di 4 filtri a soli poli di ordine $M \cdot M$, mostrati in figura 7.3 (simboli come in tabb. 7.3 e 7.4)

| | *F*1 | *F*2 | *F*3 | *F*4 |
|---|---|---|---|---|
| Coefficienti indipendenti | (7 · 7), 4(3 · 3) (28 + 6) = 34 | (7 · 7), 4(4 · 4) (28 + 10) = 38 | (7 · 7), 4(5 · 5) (28 + 15) = 43 | (7 · 7), 4(7 · 7) (45 + 28) = 73 |
| $\delta_1$ | 0,07 | 0,056 | 0,037 | 0,034 |
| $\delta_2$ | 0,003 | 0,0017 | 0,0012 | 0,00018 |
| $\Delta B_n$ | 0,093 | 0,093 | 0,093 | 0,062 |

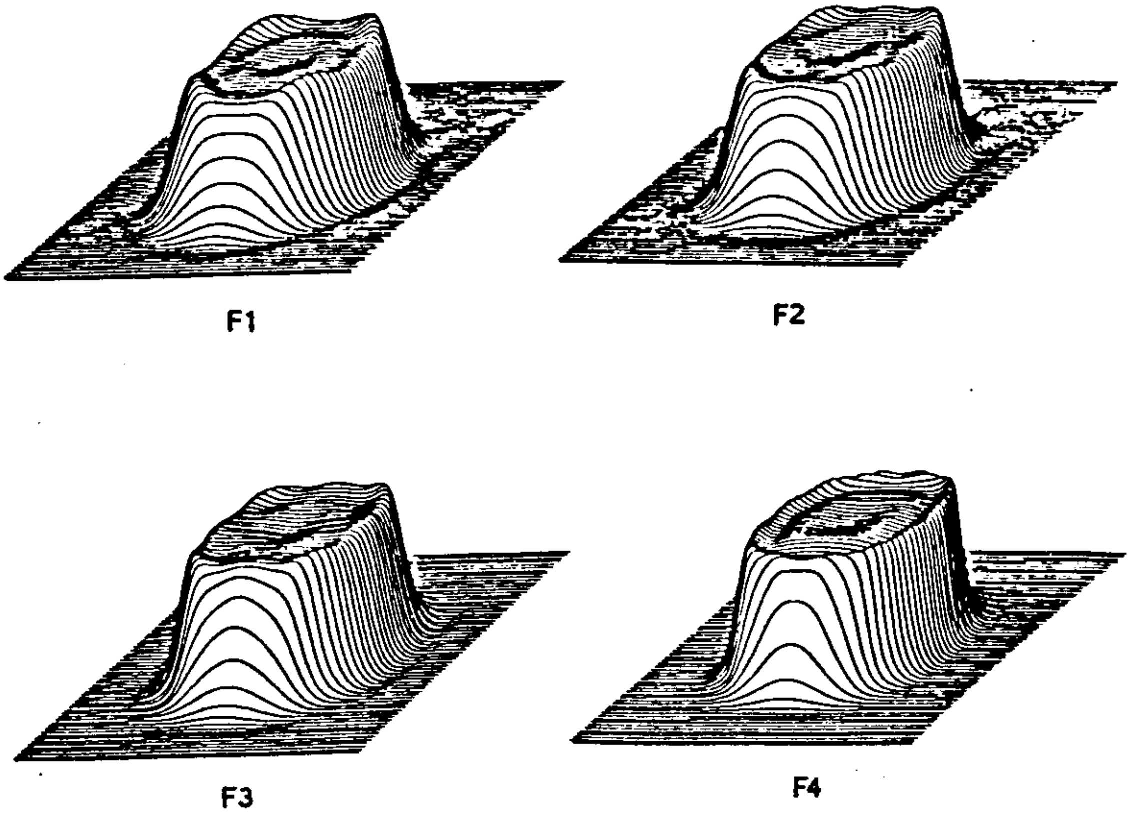



Figura 7.3
Risposte in frequenza di alcuni filtri numerici 2D IIR, costituiti dalla cascata di un filtro 2D FIR (di ordine $N \cdot N$) e di 4 filtri a soli poli di ordine $M \cdot M$ (i valori dei vari parametri sono riportati nella tab. 7.5).

Tali filtri sono stabili, come verificato con le prove di stabilità (Cappellini, Emiliani, 1981).

## 7.7 Considerazioni di confronto fra i vari tipi di filtri numerici 1D e 2D.

Come sopra mostrato, sono disponibili diversi metodi di progetto per filtri numerici 1D e 2D. I primi, come osservato, possono essere applicati all'elaborazione delle immagini numeriche per righe e colonne (risposte in frequenza rettangolari); i secondi possono essere applicati con risposte in frequenza di forma imposta (in particolare con simmetria circolare, quando non si abbiano direzioni da privilegiare sulle altre).

Per quanto riguarda il confronto fra i vari tipi di filtri numerici e in particolare tra filtri FIR e IIR, si possono sottolineare tre aspetti principali:

(1) l'efficienza di filtraggio, misurabile con i tre parametri già indicati (oscillazioni in banda $\delta_1$, oscillazioni fuori banda $\delta_2$, pendenza al taglio $\Delta B_n$) e per i filtri 2D con il grado di circolarità (nel caso di simmetria circolare) ottenibile;

(2) complessità del progetto del filtro misurabile con il tempo di calcolo richiesto per definire i coefficienti e quindi la risposta in frequenza finale;
(3) complessità del filtro, misurabile con il numero di coefficienti impiegati e relativa precisione di rappresentazione (ad esempio a 8 bit, a 12 bit, a 16 bit).

Come criterio generale si può osservare che in genere i filtri FIR assicurano una buona efficienza di filtraggio con minore complessità del progetto, ma maggiore complessità di filtraggio (cioè maggior numero di coefficienti) rispetto ai filtri IIR. Questi ultimi peraltro presentano in genere problemi di stabilità con conseguente necessità di verifica della stabilità stessa e spesso, in pratica, con la necessità di impiegare un maggior numero di bit per la rappresentazione dei coefficienti (fatto anche intuitivo, pensando che questi filtri rielaborano dati di uscita più volte e quindi tendono a perdere in precisione nelle successive elaborazioni). Essi risultano in genere più veloci (avendo minor numero di coefficienti) nell'elaborazione delle immagini.

Da quanto sinteticamente sopra indicato emerge chiaramente che la scelta del particolare tipo di filtro numerico 1D o 2D di tipo FIR o IIR dipende da diversi fattori ed è in definitiva strettamente connessa al problema di elaborazione delle immagini in esame. Se per alcune applicazioni potrà bastare un semplice filtro 1D FIR per righe e colonne, per altre occorrerà un filtro 2D IIR che abbia la minor complessità di filtraggio e quindi la massima velocità di elaborazione.

## Riferimenti bibliografici

Ahmadi M., Constantinides A. G., King R. A., *Design Technique for a Class of Stable Two-dimensional Recursive Digital Filters*, in "Proceedings of IEEE Intern. Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing" (IEEE Press, Filadelfia 1976).
Bernabò M., Cappellini V., Emiliani P. L., *Design of Two-dimensional Recursive Digital Filters*, Electronics Letters, vol. 12, N. 11, 288 sg. (1976).
Borchi E., Cappellini V., Emiliani P. L., *A New Class of FIR Digital Filters Using a Weber-type Weighting Function*, Alta Frequenza, vol. 44, N. 8 469 sg. (1975).
Calzini M., Cappellini V., Emiliani P. L., *Alcuni filtri numerici bidimensionali con risposta impulsiva finita*, Alta Frequenza, vol. 44, N. 12, 747-53 (1975).
Cappellini V., *Design of Some Digital Filters with Application to Spectral Estimation and Data Compression*, in "Proceedings of PIB Symposium on Computer Processing in Communications", 1969 (Polytechnic Institute of Brooklyn, Brooklyn e New York 1970).
– *Enhancement, Filtering and Preprocessing Techniques*, su invito in "NATO Advanced Study Institute on Digital Image Processing and Analysis", Bonas, 1978 (Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Riin 1980).
– Constantinides A. G., Emiliani P., *Digital Filters and Their Applications* (Academic Press, Londra e New York 1978).
– D'Amico T., Emiliani P. L., Lotti F., Pieralli F., *Una classe di filtri numerici con applicazioni all'elaborazione di segnali trasmessi da veicoli spaziali*, Alta Frequenza, vol. 37, N. 9, 834-44 (1968).
– Emiliani P., *2D FIR and IIR Digital Filters*, in "Proceedings of European Conference on Circuit Theory and Design" (Delft University Press, Delft 1981).
Constantinides A. G., *Spectral Transformations for Digital Filters*, IEEE Proceedings, vol. 117, N. 8 1585-90 (1970).
Costa J. M., Venetsanopoulos A. N., *Design of Circulary Symmetric Two-dimensional Recursive Filters*, IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. ASSP-22, N. 6, 432-43 (1974).

Ekstrom M. P., Twogood R. R., Woods J. W., *Two-dimensional Recursive Filter Design. A Spectral Factorization Approach*, IEEE Trans. Acoustics Speech and Signal Processing, vol. ASSP-28, N. 2, 16-26 (1980).

Huang T. S., *Two-dimensional Windows*, IEEE Trans. Audio Electroacoustics vol. AU-20, N. 1, 88 sg. (1972).

Kaiser J. F., *Digital Filters*, in Kuo F. F. e Kaiser J. F. (a cura di) "System Analysis by Digital Computer" (Wiley, New York 1966).

Maria G. A., Fahmy M. M., "*An Lp Technique for Two-dimensional Digital Recursive Filters*", IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. ASSP-22, N. 1, 15-21 (1974).

McClellan J. H., *The Design of Two-dimensional Digital Filters by Transformations*, in "Proceedings of the 7th Annual Princeton Conference on Information Sciences and Systems", 247-51 (1973).

Shanks J. L., Treitel S., Justice J. H., *Stability and Synthesis of Two-dimensional Recursive Filters*, IEEE Trans. Audio Electroacoustics, vol. AU-20, N. 2, 115-28 (1972).

# Capitolo 8

# Riduzione della ridondanza, compressione dei dati

## 8.1 Introduzione

Nel capitolo 3, descrivendo la conversione delle immagini continue in forma numerica, è emerso chiaramente il problema della grande quantità di dati (bit o byte) necessari per la rappresentazione discreta o numerica delle immagini, specie se l'operazione di campionamento è effettuata correttamente, in accordo al relativo teorema.

Nello stesso capitolo 3 sono stati anche indicati alcuni accorgimenti pratici utilizzati per ridurre tale quantità di dati (ad esempio il campionamento e la quantizzazione non uniformi; vedi § 3.4). Altre tecniche sono state presentate nel capitolo 6, usando particolari elaborazioni locali spaziali (vedi §§ 6.2 e 6.6).

In effetti il problema della quantità di dati connessi all'elaborazione delle immagini in forma numerica va acquistando importanza sempre maggiore, sia per l'aumento di dimensione delle immagini elaborate (da $64 \cdot 64$ a $128 \cdot 128$, à $256 \cdot 256$ fino a $1024 \cdot 1024$ dati campionati o byte) che per il crescente numero di immagini numeriche nei diversi settori applicativi (vedi capp. 13-18).

In questo capitolo sono presentati i metodi più significativi per ridurre la quantità di dati nelle immagini campionate e numeriche, o, come tecnicamente si dice, per la compressione dei dati (*data compression*). Prima di illustrare le varie tecniche di riduzione o compressione sono richiamati alcuni concetti fondamentali di teoria dell'informazione (codifica di sorgente).

## 8.2 La teoria dell'informazione e la riduzione dei dati (codifica di sorgente)

La base teorica principale della riduzione o compressione dei dati si può ricondurre al primo teorema di Shannon (Shannon, Weaver, 1949) sulla codifica di sorgente nell'ambito della teoria dell'informazione, di seguito richiamato.

Data una sorgente a memoria zero $S$, che emette i simboli $s_1, s_2, ..., s_q$ con le corri-

spondenti probabilità (indipendenti, non condizionate) $p_1, p_2, ..., p_q$, viene definita entropia della sorgente stessa la grandezza:

$$H(S) = \sum_{i=1}^{q} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} \qquad [8.1]$$

che rappresenta la quantità media di informazione per simbolo, emessa dalla sorgente, misurata in bit (unità binaria, *binary unit*, avendo utilizzato nella [8.1] il logaritmo in base 2).

Nella codifica di sorgente, ciascun simbolo $s_i$ emesso dalla sorgente $S$ viene trasformato o "codificato" in una parola (gruppo di simboli) $X_i$, comprendente un certo numero $l_i$ di altri simboli $x_j$, appartenenti a un alfabeto finito ($j = 1, ... r$). Si definisce lunghezza media $L$ di questa trasformazione o codifica:

$$L = \sum_{i=1}^{q} p_i l_i. \qquad [8.2]$$

Un codice così definito si dice univocamente decodificabile se ad ogni parola di codice $X_i$ corrisponde uno e un solo simbolo di sorgente $s_i$. Il codice si dice poi compatto per la sorgente in esame $S$, se la sua lunghezza media $L$ è minore di (o uguale a) quella di ogni altro codice univocamente decodificabile. La ricerca del codice compatto equivale quindi alla ricerca della lunghezza media $L$ più piccola possibile.

Il primo teorema di Shannon, nella sua forma di base, afferma che qualsiasi trasformazione o codifica di sorgente soddisfa alla seguente relazione fondamentale:

$$H_r(S) \leq L \qquad [8.3]$$

ove $H_r(S)$ è l'entropia espressa dalla relazione [8.1], ma con il logaritmo in base $r$ (numero dei simboli diversi della codifica di sorgente).

Come conseguenza dell'importante teorema [8.3] si ha che la lunghezza media minima (e quindi la riduzione o compressione massima) corrisponde al valore della entropia della sorgente (misurata in unità $r$) $H_r(S)$. Si può anche definire l'efficienza del codice come:

$$\eta = \frac{H_r(S)}{L} \qquad [8.4]$$

che ha appunto i valori limiti tipici di un'efficienza (0 minimo, 1 o 100% massimo). Il valore complementare ad 1, $1 - \eta$, rappresenta la ridondanza del codice di sorgente.

Un metodo importante per definire codici compatti è dovuto a Huffmann: la lunghezza $l_i$ di ciascuna parola di codice $X_i$ è definita come inversamente proporzionale alla probabilità $p_i$ del corrispondente simbolo $s_i$ di sorgente (Abramson, 1963). Con questo criterio i simboli di sorgente più probabili e quindi più frequenti saranno codificati in parole o sequenze più brevi rispetto ai simboli meno probabili.

Altri due concetti – e relative definizioni – importanti nell'ambito della teoria

dell'informazione in riferimento alla riduzione dei dati (codifica di sorgente) sono: la capacità di canale e la funzione di distorsione (*rate-distortion function*).

Per quanto riguarda la capacità di canale, consideriamo una seconda trasformazione o codifica, detta appunto codifica di canale (fig. 8.1) che segue la codifica di sorgente, effettuata al fine di proteggere i simboli di sorgente o le parole $X_i$ dal rumore e disturbi introdotti dal canale (in pratica mezzo di trasmissione a distanza, rumore e disturbi locali connessi alla misura, acquisizione o elaborazione dell'informazione). Se indichiamo con $\{A\}$ l'alfabeto di ingresso nel canale (simboli $a_1, a_2, ..., a_r$) e $\{B\}$ l'alfabeto di uscita (simboli $b_1, b_2, ..., b_s$), si definisce informazione mutua del canale considerato:

$$I(A,B) = \sum_{A,B} p(a_i, b_j) \log \frac{p(a_i/b_j)}{p(a_i)p(b_j)} \qquad [8.5]$$

espressione che rappresenta l'informazione media ottenuta dall'emissione di un simbolo $a_i$ all'ingresso del canale, quando sia noto il simbolo $b_j$ di uscita (Abramson, 1963). La $I(A, B)$ è una funzione non negativa convessa delle probabilità $p(a_i)$ e ammette sempre un massimo. Questo massimo, preso su tutte le possibili scelte delle probabilità dei simboli d'ingresso $p(a_i)$, è chiamato capacità di canale, cioè:

$$C = \max_{p(a_i)} I(A,B). \qquad [8.6]$$

Con riferimento alla capacità di canale, il secondo teorema di Shannon sulla codifica di canale mostra che, per una certa sorgente e canale con la capacità $C$ data dalla [8.6], è sempre possibile (sul piano teorico) trovare una trasformazione o codifica opportuna, detta appunto di canale, che renda minima la probabilità di errore in ricezione, cioè assicuri che i simboli trasmessi siano ricostruiti con errore piccolo a piacere, purché le parole di questa codifica di canale siano opportunamente lunghe.

Per quanto riguarda la funzione di distorsione, consideriamo un vettore $\bar{S}$ dell'al-

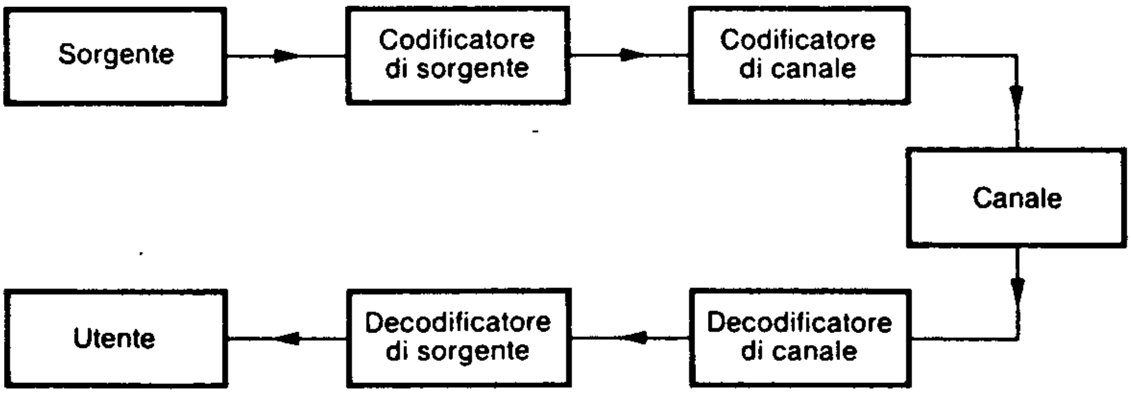



**Figura 8.1**
Schema a blocchi della codifica di sorgente e di canale applicate a una sorgente di informazione e, dopo il canale, della decodifica di canale e di sorgente prima dell'utilizzazione (o ricezione) finale dell'informazione.

fabeto di sorgente $S=(s_{i1}, s_{i2},..., s_{in})$ codificato in un vettore $\overline{X}$ dalla codifica di sorgente $\overline{X}=(X_{i1}, X_{i2},..., X_{in})$. Si indica come misura della distorsione $\rho_n(\overline{S}, \overline{X})$ la distorsione corrispondente alla rappresentazione di $\overline{S}$ con $\overline{X}$. La definizione matematica più esatta di $\rho_n(\overline{S}, \overline{X})$ dipende dall'informazione di sorgente e dal suo utente o utilizzatore. Un criterio spesso utilizzato, specialmente per sistemi senza memoria, è il cosiddetto criterio di fedeltà per singola lettera (*single-letter fidelity criterion*), che corrisponde a definire $\rho_n(\overline{S}, \overline{X})$ come media aritmetica delle singole distorsioni $\rho(s_{ik}, X_{ik})$ introdotte dalla rappresentazione di $s_{ik}$ con $X_{ik}$, cioè:

$$\rho_n(\overline{S}, \overline{X}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \rho(s_{ik}, X_{ik}). \qquad [8.7]$$

Facendo intervenire la probabilità condizionale $p(X_{ik}/s_{ik})$, si può anche definire la distorsione media globale $d$:

$$d = \sum_{S,X} p(s_{ik}) p(X_{ik}/s_{ik}) \rho(s_{ik}, X_{ik}). \qquad [8.8]$$

Si possono anche derivare funzioni di misura della distorsione, tenendo conto del concetto di informazione mutua (relazione [8.5]); in particolare, può essere ottenuta la cosiddetta *rate-distortion function* (Berger, 1971).

## 8.3 Classificazione delle diverse tecniche di riduzione o compressione dei dati

Come già indicato nel paragrafo precedente, la relazione [8.3] stabilisce il limite fondamentale di Shannon per ogni trasformazione o codifica di sorgente. Nella definizione della [8.3] si è ammesso che il codice di sorgente usato sia univocamente decodificabile e quindi la trasformazione perfettamente reversibile, nel senso che dalla forma codificata si può ritornare, senza alcuna alterazione o errore, ai dati di sorgente (operazione di decompressione o ricostruzione di fig. 8.1). Nel caso che ciò non avvenga, cioè si abbia un codice che non permetta di ricostruire perfettamente i dati di sorgente, si parla di riduzione o compressione dei dati di tipo non reversibile o irreversibile (saranno ovviamente di questo tipo le trasformazioni che non soddisfano la [8.3]).

Le tecniche di compressione non reversibili sono in pratica utili nell'elaborazione delle immagini (oltre a quelle reversibili), perché, per certe applicazioni, non è richiesta una riproduzione perfetta dell'immagine originaria, ma si accettano moderati errori di ricostruzione; oppure perché dell'immagine originaria interessano solo alcune caratteristiche particolari (tipico esempio di compressione irreversibile con forte riduzione dei dati è l'estrazione dei contorni, che pure è di grande utilità in pratica).

Alcune tecniche di riduzione o compressione di tipo reversibile sono le seguenti:

– campionamento adattivo
– previsione

- interpolazione
- codifica a lunghezza di parola variabile
- trasformazioni (Fourier, Hadamard-Walsh...).

Tecniche di compressione non reversibili sono invece:

- soglie
- estrazione di parametri
- istogramma dei livelli di grigio
- estrazione dei contorni
- spettro di potenza (o trasformazioni con solo modulo).

E' utile sottolineare che molte delle precedenti tecniche possono applicarsi all'elaborazione numerica delle immagini a una e due dimensioni (1D e 2D). Come già osservato nel filtraggio numerico (cap. 7), anche le tecniche 1D possono essere utilizzate per l'elaborazione delle immagini, applicandole per righe o colonne.

Prima di illustrare più in dettaglio alcune delle più importanti tecniche di compressione 1D o 2D di tipo reversibile o irreversibile, definiamo un parametro molto importante per il confronto di efficienza delle varie tecniche, il cosiddetto rapporto di compressione (o rapporto di riduzione). Nel modo più generale, se $L_s$ è la lunghezza (misurata ad esempio con il numero di simboli di sorgente $s_i$) di un certo blocco di informazione di sorgente e $L_c$ è la corrispondente lunghezza (misurata ad esempio con il numero di parole di codifica $X_i$) della rappresentazione del blocco stesso con una certa tecnica di codifica o compressione, si può definire rapporto di compressione:

$$C_s = \frac{L_s}{L_c}. \qquad [8.9]$$

Utilizzando la rappresentazione binaria, sia per i dati di sorgente sia per la codifica di sorgente, una definizione del rapporto di compressione è la seguente:

$$C_r = \frac{H(S)}{L} \qquad [8.10]$$

che esprime il rapporto fra il numero di bit in media per simbolo di sorgente e il corrispondente numero in media per parola di codifica (lunghezza media).

In pratica, nel caso delle immagini campionate numeriche, i simboli di sorgente $s_i$ corrispondono ai vari livelli di grigio della rappresentazione quantizzata della $f(x, y)$: ad esempio, con parole di 7 bit si hanno 128 livelli di grigio e quindi $i = 1, ..., 128$ (vedi anche cap. 3). Si utilizzano pertanto due definizioni del rapporto di compressione: rapporto di compressione di parole $C_p$, definito come rapporto fra numero di parole $N_i$ (campioni di ingresso) della immagine originaria e corrispondente numero di parole $N_c$ (campioni di uscita) della forma compressa, cioè:

$$C_p = \frac{N_i}{N_c} \qquad [8.11]$$

e rapporto di compressione di bit, $C_b$, definito come rapporto fra il numero di bit d'ingresso $n_i$ dell'immagine (o parte di immagine considerata) e il corrispondente numero di bit di uscita $n_u$ della forma compressa per la stessa immagine (o parte di essa):

$$C_b = \frac{n_i}{n_u}. \qquad [8.12]$$

## 8.4 Campionamento adattivo

Già nel capitolo 3 (§ 3.4) si è accennato al campionamento spaziale adattivo come tecnica pratica da applicare alle varie immagini, in modo tale da usare un campionamento più fitto (con maggior numero di campioni) in zone dell'immagine con rapida variazione dei livelli di grigio rispetto a quello effettuato in altre zone a piccola variazione dei livelli di grigio stessi. E' evidente che tale tecnica (unita eventualmente a quella della quantizzazione non uniforme, applicata con criteri analoghi) permette di ridurre il numero di campioni e quindi di dati numerici rispetto a un campionamento uniforme, che sia effettuato in accordo al teorema del campionamento (basandosi, cioè, sulle variazioni più rapide dei livelli di grigio).

Le considerazioni intuitive precedenti possono essere rese più rigorose, con il seguente procedimento. Si supponga di dividere l'immagine in esame in sottoimmagini di forma quadrata (ad esempio, un'immagine 256 · 256 in sottoimmagini di 32 · 32) e di effettuare in ogni sottoimmagine la trasformata di Fourier 2D, in modo da determinare le frequenze spaziali massime e quindi il valore $X_i$ del passo di campionamento necessario (vedi la [3.9]). Si verificherà così che solo in alcune sottoimmagini è necessario mantenere il passo di campionamento $X$ usato nel campionamento di tutta l'immagine (che aveva portato alla dimensione 256 · 256 di dati campionati), mentre in molte sottoimmagini il valore determinato di $X_i$ risulterà maggiore di $X$, cioè sarà sufficiente utilizzare un numero di campioni minore. In particolare per le sottoimmagini con variazione lenta dei livelli di grigio nel dominio spaziale (sfondi uniformi, transizioni regolari dal bianco al nero...) si otterrà una notevole diminuzione di campioni (numero assai inferiore a 32 · 32).

La tecnica precedente sarà tanto più adattiva spazialmente, quanto più piccole saranno le sottoimmagini considerate, e corrispondentemente si otterranno valori più elevati del rapporto di compressione globale. D'altra parte, la diminuzione eccessiva delle dimensioni delle sottoimmagini comporta una maggiore complessità di elaborazione: determinazione della trasformata di Fourier in ciascuna sottoimmagine, necessità di identificare il passo di campionamento utilizzato per ogni sottoimmagine (con un'opportuna sequenza di identificazione per ogni blocco di dati di una sottoimmagine). Converrà quindi in genere adottare un ragionevole compromesso nell'adattività spaziale, per ottenere buoni rapporti di compressione con moderata complessità di elaborazione e identificazione.

## 8.5 Previsione o interpolazione

Consideriamo la previsione unidimensionale, applicabile per righe e per colonne. Nel processo di previsione si ammette la conoscenza "a priori" di un certo numero di dati (campioni spaziali) precedenti $f_{n-1}, f_{n-2}, f_{n-3}$ ... rispetto al dato attuale considerato $f_n$. La relazione generale che esprime il valore previsto $f_p$ è un'equazione alle differenze finite del seguente tipo:

$$f_{pn} = f_{n-1} + \Delta f_{n-1} + \Delta^2 f_{n-1} + \cdots + \Delta^N f_{n-1} \qquad [8.13]$$

ove:

$$\Delta f_{n-1} = f_{n-1} - f_{n-2} \qquad [8.14]$$

$$\Delta^2 f_{n-1} = \Delta f_{n-1} - \Delta f_{n-2} \qquad [8.15]$$

$$\Delta^N f_{n-1} = \Delta^{N-1} f_{n-1} - \Delta^{N-1} f_{n-2}. \qquad [8.16]$$

Il valore di $N$ corrisponde all'ordine dell'algoritmo di previsione: con $N=0$ si ha il previsore di ordine zero (*zero-order predictor*); con $N=1$ si ha il previsore di ordine uno (*first-order predictor*) (Benelli, Cappellini, Lotti, 1980).

Per ottenere la compressione voluta, dopo aver effettuato la previsione con la relazione [8.13], si procede in genere nel seguente modo:

– si confronta il valore previsto $f_{pn}$ con il valore effettivo attuale $f_n$;
– se la differenza è inferiore a un errore o tolleranza ammessa $\delta$, il valore o campione attuale $f_n$ è eliminato (in quanto correttamente previsto), altrimenti è mantenuto nella forma compressa (fig. 8.2).

Come mostrato nella figura 8.2, i dati non compressi, in uscita dalla "porta", sono inviati in un'apposita memoria (*buffer*), ove possono essere riorganizzati opportunamente (ad esempio, nel caso di elaborazione per righe o colonne e trasmissione a distanza dei dati dell'immagine, occorre ridistribuire i dati acquisiti ed elaborati a intervalli temporali costanti). In genere ai dati nel buffer vengono aggiunte opportune parole di identificazione o sincronizzazione; nel caso di trasmissione a distanza, i dati entrano nel buffer in forma aperiodica ed escono in forma periodica.

I tipi di previsione più importanti per le applicazioni pratiche sono quelli di basso ordine (in particolare ordine zero e uno), per la loro notevole semplicità: in figura 8.3 è mostrato un esempio grafico di operazione del previsore di ordine zero o ZOP (*zero-order predictor*). Peraltro è stato mostrato sperimentalmente che il compressore con previsore ZOP con "tolleranza di ampiezza fluttuante", cioè centrata sull'ultimo campione $f_{n-1}$ (fig. 8.3), per il quale il campione previsto è espresso dalla seguente relazione:

$$f_{pn} = f_{n-1} \pm \delta \qquad [8.17]$$

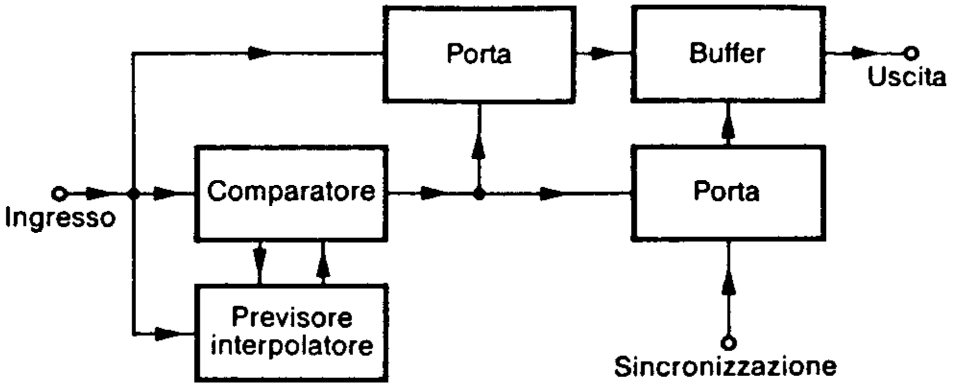



**Figura 8.2**
Schema a blocchi di un sistema di compressione con previsione o interpolazione. E' indicata anche la memoria (*buffer*) di uscita con l'opportuna sincronizzazione dei dati utili rimanenti dopo l'operazione di compressione.

è in media uno dei più efficienti (maggiori rapporti di compressione a pari errore o distorsione introdotta) (Medlin, 1965).

L'operazione di interpolazione è simile a quella di previsione, con la sola differenza che ora sono utilizzati non solo dati precedenti ($f_{n-1}, f_{n-2}, \ldots$), ma anche dati successivi ($f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots$) rispetto a quello attuale $f_n$ (Benelli, Cappellini, Lotti, 1980). Ancora gli algoritmi più importanti (utilizzati in pratica con un sistema del tipo mostrato in fig. 8.2) sono quelli di basso ordine: interpolatore di ordine zero (ZOI, *zero-order interpolator*).

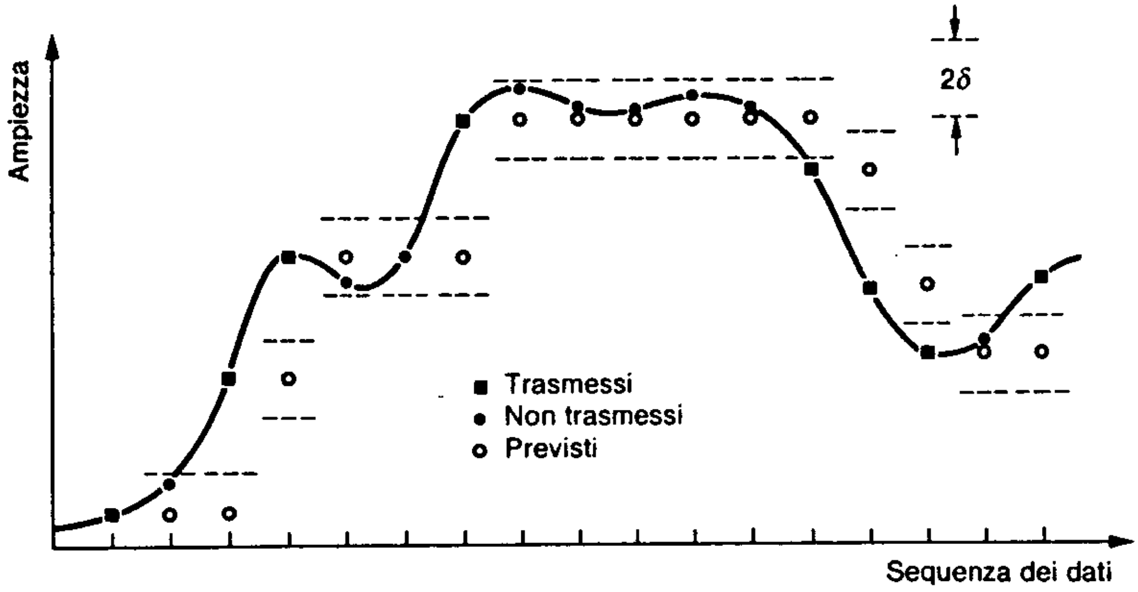



**Figura 8.3**
Esempio di applicazione della previsione lineare di ordine zero (ZOP) al livello di grigio secondo una riga o una colonna dell'immagine in esame, con indicazione dei campioni trasmessi, previsti e non trasmessi ($\pm\,\delta$ è la tolleranza di ampiezza).

## 8.6 Previsione adattiva

Le tecniche di compressione con previsione adattiva, di maggiore complessità delle precedenti, sono utili per ottenere maggiore efficienza, soprattutto nel caso di immagini con rapide e mutevoli variazioni dei livelli di grigio. Si può definire previsione adattiva lineare e non lineare.

Nella previsione adattiva lineare (ALP, *adaptive linear prediction*) il valore previsto $f_{pn}$ è determinato mediante una sommatoria pesata di $M$ precedenti campioni o dati:

$$f_{pn} = \sum_{i=1}^{M} \beta_i f_{n-i} \qquad [8.18]$$

ove i $\beta_i$ sono opportuni coefficienti o pesi. Come nella previsione normale, se l'errore di previsione è compreso entro una certa soglia $\delta$, il valore attuale $f_n$ viene eliminato, altrimenti viene mantenuto. Nel caso di processo stazionario gaussiano con media zero (vedi § 1.5), i coefficienti $\beta_i$ possono essere determinati minimizzando l'errore quadratico medio espresso dalla seguente relazione:

$$\sigma^2 \{M,N\} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left[ f_{n-k} - \sum_{i=1}^{M} \beta_i(M,N) f_{n-k-i} \right]^2 \qquad [8.19]$$

essendo $M$, come già osservato, il numero di campioni precedenti utilizzati per la previsione e $N$ il numero di campioni o dati che il previsore adattivo usa per acquisire l'evoluzione del livello di grigio (su cui viene effettuata la media dell'errore quadratico). La tecnica è tanto più vantaggiosa quanto più rimangono valide le caratteristiche di evoluzione del livello di grigio, in modo da non dovere ripetere troppo frequentemente la minimizzazione [8.19]. Dalla relazione [8.19] è agevole determinare i valori di $\beta_i(M, N)$, uguagliando a zero la derivata: si ottiene un sistema di $M$ equazioni lineari in $M$ incognite (Benelli, Cappellini, Lotti, 1980).

Nelle tecniche con previsione adattiva non lineare vengono applicati criteri di scelta fra diverse soluzioni in base all'evoluzione del livello di grigio secondo $x$ e $y$ e viene conseguentemente minimizzato l'errore quadratico medio.

## 8.7 Modulazione differenziale

Le tecniche di compressione del tipo modulazione differenziale, note anche come DPCM (*differential pulse code modulation*), sono assai semplici come principio di funzionamento.

Viene ancora previsto un valore $f_{pn}$ come combinazione lineare di $M$ campioni o dati precedenti:

$$f_{pn} = \sum_{i=1}^{M} a_i f_{n-i} \qquad [8.20]$$

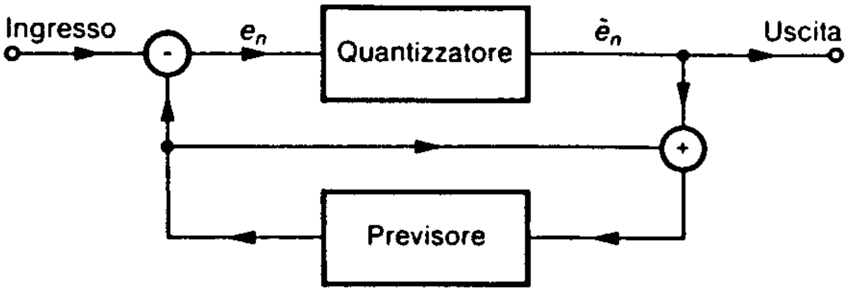



**Figura 8.4**
Schema di principio della modulazione differenziale con uso di un previsore.

utilizzando uno degli algoritmi precedentemente illustrati (ZOP, FOP, ALP...). Viene mantenuta (o trasmessa a distanza) la differenza $e_n$ fra il valore effettivo $f_n$ e quello previsto $f_{pn}$, che è quantizzata con intervalli di quantizzazione e codificata in forma binaria (vedi § 3.3). In sostanza dall'elaborazione escono i valori uguali alle differenze fra i valori attuali e quelli previsti. Questa tecnica, che nell'applicazione può essere schematizzata con uno schema a blocchi (fig. 8.4), è assai efficiente per certi tipi di immagini, nelle quali le differenze $e_n$ risultano piccole e quindi rappresentabili con pochi bit.

Sono state proposte e definite molte forme modificate di modulazione differenziale, in particolare con criteri adattivi (Benelli, Cappellini, Lotti, 1980).

## 8.8 Modulazione delta

La modulazione delta può essere considerata come una tecnica con modulazione differenziale del tipo precedente, nella quale la differenza è sempre espressa con un solo valore $\Delta$ (cioè un solo bit, 0 ad esempio per differenza negativa e 1 per differenza positiva). In definitiva, al posto di ogni campione (livello di grigio) viene mantenuto solo un bit (0 oppure 1). Ciò comporta una notevole riduzione dei dati, ma anche una certa perdita di informazione. Tale perdita è tanto maggiore, ovviamente, quanto più si hanno variazioni brusche (a pendenza elevata del livello di grigio).

Lo schema a blocchi e il funzionamento di principio di un sistema con modulazione delta sono mostrati in figura 8.5.

Per ovviare alle limitazioni della modulazione delta classica, sopra illustrata, sono state introdotte diverse modifiche, le più importanti delle quali sono le seguenti:

– *modulazione delta adattiva in ampiezza*, nella quale il passo di quantizzazione $\Delta$ è variato in base alle variazioni effettive del livello di grigio: in pratica il passo viene ridotto quando si hanno piccole variazioni del livello di grigio e viene aumentato quando si hanno forti variazioni del livello stesso, al fine di seguire con approssimazione migliore l'effettiva variazione del livello di grigio;

– *modulazione delta adattiva in durata* (*o asincrona*), nella quale il passo di quan-

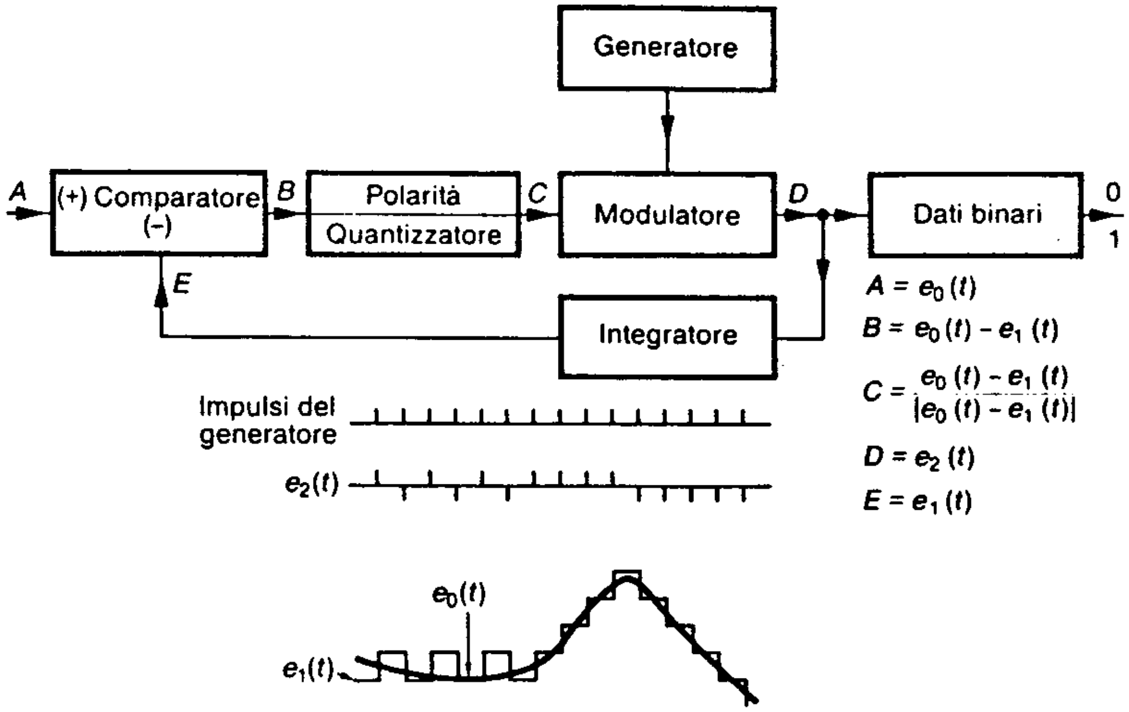



Figura 8.5
Schema a blocchi della modulazione delta con indicazione delle principali forme d'onda.

tizzazione è mantenuto costante, ma si varia la durata (cioè il passo di campionamento, e quindi si utilizza il principio del campionamento spaziale adattivo; vedi § 8.4) in modo da agire più frequentemente quando si hanno rapide variazioni e più lentamente quando il livello di grigio ha variazioni minori. Una tecnica particolarmente efficace, sviluppata in questo ambito, è la cosiddetta modulazione delta asincrona operazionale (Cappellini e altri, 1974), nella quale l'algoritmo procede con passi avanti e indietro (con inibizione) fino a determinare il passo di campionamento più utile da adottare.

Nelle precedenti tecniche adattive, in genere, le variazioni (di ampiezza o di passo di campionamento) avvengono con base 2 (cioè 1, 2, 4, 8...), per maggiore semplicità pratica e facilità di inserimento dell'informazione relativa all'effettivo intervallo di quantizzazione o passo di campionamento utilizzato.

## 8.9 Impiego del filtraggio numerico

L'impiego del filtraggio numerico 1D (applicato per linee o colonne) o 2D è assai utile per ottenere compressione dei dati per i seguenti motivi:

(*a*) il filtraggio numerico passa-basso o passa-banda rappresenta di per sé una tecnica di compressione dei dati, in quanto con filtri di questo tipo (vedi cap. 7) si mantengono solo le frequenze spaziali comprese entro una certa banda (in bassa o media o

altra frequenza) e quindi per la riduzione effettiva di banda è richiesto un passo di campionamento spaziale più grande (essendo le variazioni dei livelli di grigio comprese in un intervallo di frequenza più piccolo), ottenendo un minore numero di campioni spaziali (vedi § 3.2);

(*b*) il filtraggio numerico passa-basso costituisce una pre-elaborazione utile (e spesso necessaria) prima di applicare una qualunque tecnica di compressione, in quanto permette di ridurre la banda delle frequenze spaziali, eliminando le frequenze spaziali più elevate e quindi riducendo già la quantità dei dati campionati e ponendoli in forma tale da essere ulteriormente compressi con più facilità (basta pensare al previsore ZOP, che viene a operare più efficientemente, o alla modulazione delta, che può approssimare meglio variazioni dei livelli di grigio meno rapide);

(*c*) il filtraggio numerico passa-banda (in particolare 2D) in bande adiacenti contigue costituisce una forma di rappresentazione completa dello spettro dell'immagine, che richiede in genere (in particolare selezionando alcune bande utili) minore quantità dei dati rispetto a quelli che individuano l'immagine stessa, con l'ulteriore possibilità di eliminare quelle bande ove non si trova informazione utile (cioè variazioni effettive dei livelli di grigio) o di estrarre valori quadratici o di tipo modulo significativi, almeno per alcune indagini specifiche.

## 8.10 Uso di trasformazioni

Nel descrivere le varie trasformazioni (cap. 5) è stato più volte messo in evidenza il fatto che le diverse trasformazioni 2D discrete hanno in genere la proprietà di presentare un'alta concentrazione dei valori trasformati. Cioè, nel dominio trasformato, i valori trasformati sono concentrati in una regione relativamente piccola rispetto all'estensione dell'immagine in esame, ovvero il numero di valori trasformati significativi è in definitiva minore del numero di dati originari (campioni) dell'immagine (§ 5.10).

Per quanto sopra ricordato, le diverse trasformazioni 2D costituiscono quindi già di per sé una tecnica di riduzione o compressione dei dati. Per ottenere maggiore compressione possono essere applicate diverse tecniche (del tipo precedentemente indicato), e in particolare le seguenti:

(*a*) applicazione di una soglia ai valori trasformati, in modo da mantenere solo quelli che superano la soglia stessa (valori tipici di soglia $1 \div 5\%$); ciò implica una certa degradazione dell'immagine nella forma compressa, che però può risultare molto modesta e comunque accettabile per determinate applicazioni (un esempio è mostrato nella tav. 6 su un'immagine tomografica: trascurando valori della FFT 2D, che come si vede è assai "concentrata", inferiori a $5^0/_{00}$, si ottiene una buona ricostruzione dell'immagine) (Melani, 1983).

(*b*) divisione dei valori trasformati in blocchi quadrati ($8 \cdot 8$, $16 \cdot 16$, $32 \cdot 32$...) e codifica di essi con parole a lunghezza variabile (determinato il valore massimo in ogni blocco, si utilizza per tutti i valori di tale blocco un numero di bit sufficiente a rap-

presentare il massimo) con opportuna identificazione delle diverse lunghezze usate (come modifica di questa tecnica possono essere eliminati tutti i valori di quei blocchi, nei quali il valore massimo è inferiore a una certa soglia);
(*c*) applicazione delle diverse tecniche di compressione (previsione, interpolazione...) ai valori trasformati, considerati come matrice di dati (o stringa di dati nel caso di applicazione di tecniche 1D).

Le diverse trasformazioni discrete 2D vengono effettuate, come già osservato nel capitolo 5, con le tecniche veloci (§ 5.10): trasformata di Fourier veloce (FFT), trasformata di Walsh veloce (FWT)...

L'utilizzazione della codifica a lunghezza di parola variabile, indicata al punto (*b*) precedente, è spesso consigliabile a causa dei valori anche molto elevati che alcuni valori trasformati (o coefficienti) possono assumere. Nel caso ad esempio dell'uso della trasformata di Walsh (FWT), se $N = 2^n$, con $n$ intero, è il numero di righe uguale al numero di colonne dell'immagine campionata in esame e $Q$ (vedi § 3.3) è il numero di livelli di quantizzazione, il valore massimo nel dominio trasformato (corrispondente alla somma di tutti i campioni dell'immagine) sarà $N^2 Q$. Se ora $q$ è il valore di quantizzazione per i valori o coefficienti trasformati, il numero di bit richiesto per specificare la lunghezza della parola binaria di codifica dei coefficienti stessi sarà:

$$n_b = \log_2 \left[ \log_2 \left( \frac{N^2 Q}{q} + 1 \right) \right] \qquad [8.21]$$

ove i logaritmi sono arrotondati all'intero più vicino superiore (Benelli, Cappellini, Lotti, 1980).

Con le precedenti tecniche di compressione mediante uso di trasformate 2D discrete di Fourier e di Walsh (FFT, FWT) sono stati ottenuti rapporti di compressione $C_b$ da 3 a 10 con perdita trascurabile di informazione (1-2%) (Cappellini, Lotti, Stricchi, 1975).

## 8.11 Confronto fra le diverse tecniche di riduzione o compressione dei dati

Come appare da quanto sopra descritto, si possono utilizzare molte tecniche di riduzione o compressione dei dati per immagini discrete o numeriche.

Per la valutazione dell'efficienza delle singole tecniche, si utilizza in genere il valore del rapporto di compressione ($C_p$ o $C_b$), tenendo conto, nei dati di uscita, oltre che di quelli prettamente informativi (dati originari non eliminati dal compressore), anche di quelli aggiunti per identificare i dati restanti o riorganizzare gli stessi nel buffer eventuale di uscita (fig. 8.2).

Oltre al rapporto di compressione ci si riferisce a due parametri, che misurano l'entità della distorsione o alterazione introdotta sull'immagine elaborata dall'algoritmo di compressione:

– errore di picco $e_p$, pari alla massima differenza fra i livelli di grigio corrispondenti nell'immagine ricostruita dai dati compressi e l'immagine originaria;

– errore quadratico medio $e_m$ (*rms error*), pari alla radice quadrata del valore quadratico medio valutato sulle differenze fra i livelli di grigio corrispondenti nell'immagine ricostruita dai dati compressi e l'immagine originaria.

Sulla base anche dei criteri di confronto sopra indicati (rapporto di compressione, $e_p$ ed $e_m$) possono essere scelti i metodi di compressione per i vari tipi di immagini numeriche.

Come indicazione qualitativa si può osservare che gli algoritmi di compressione più semplici (come previsione-interpolazione, modulazione differenziale, modulazione delta...) permettono di ottenere rapporti di compressione in genere modesti ma, per certe immagini (ad esempio con variazioni dei livelli di grigio più regolari, con zone a livelli costanti...), anche assai buoni, mentre gli algoritmi più complessi (sistemi adattivi, uso di trasformazioni...) possono dare rapporti di compressione maggiori a parità di errori.

La scelta fra i vari compressori di dati dipenderà quindi dalla particolare applicazione e sarà ovviamente tanto più facile quanto più sia accettabile un certo degradamento della qualità e del contenuto informativo dell'immagine in esame. In tale scelta può anche intervenire la considerazione se i dati elaborati compressi sono immediatamente utilizzati, da conservare in opportuni archivi numerici o da inviare a distanza per utilizzazione o memorizzazione remota. E' infatti importante, a questo riguardo, sottolineare che la riduzione o compressione dei dati è di notevole importanza per la trasmissione numerica a distanza, in quanto alla riduzione dei dati si può facilmente accompagnare una riduzione della banda di trasmissione (avere un minor numero di dati in un certo tempo comporta infatti una banda di trasmissione minore) (Benelli, Cappellini e Lotti, 1980).

Nella scelta interviene anche la soluzione tecnica di realizzazione dell'operazione di compressione (come elaborazione a programma con un calcolatore normale, grande, medio o piccolo, soluzione "software") oppure con sistemi speciali appositamente realizzati utilizzando circuiti "ad hoc" (soluzione "hardware") (vedi capp. 11 e 12), nel senso che alcuni algoritmi di compressione possono essere ad esempio più adatti per una realizzazione di un tipo o dell'altro.

E' infine da sottolineare l'importanza dell'uso delle tecniche di compressione assieme a quelle di codifica a controllo d'errore, a semplice rivelazione o anche con correzione d'errore. Tali tecniche di codifica (vedi § 8.2) in sostanza introducono opportuni simboli di controllo ("ridondanza controllata") al posto di una parte dei simboli di sorgente, tolti con l'operazione di compressione ("ridondanza inutile").

## Riferimenti bibliografici

Abramson N., *Information Theory and Coding* (McGraw-Hill, New York 1963).

Benelli G., Cappellini V., Lotti F., *Data Compression Techniques and Applications*, The Radio and Electronic Engineer, vol. 50, N. 1/2, 59-53 (1980).

Berger T., *Rate Distortion Theory: A Mathematical Basis for Data Compression* (Prentice Hall, Englewood Cliffs 1971).

Cappellini V., Lotti F., Ori C., Pasquini G., Pieralli F., *A Study on Data Compression Techniques*, Final Report for the ESTEC/Contract 902/70 (ESRO, CR-93) (1974).

– Stricchi C., *Some Image Compression Methods Using the Fast-Walsh-Transform*, Proceed. of 1975 Midwest Symposium on Circuits and Systems, Montreal (1975).

Medlin J. E., *Sampled-data Prediction for Telemetry Bandwidth Compression*, IEEE Trans. on Space Electronics and Telemetry, vol. SET-11, N. 1 (1965).

Melani M., *Elaborazione numerica di immagini tomografiche: filtraggio a due dimensioni*, Tesi di laurea in Ingegneria elettronica, Università di Firenze (luglio 1983).

Shannon C. E., Weaver W., *The Mathematical Theory of Communication* (1949; trad. it. *La teoria matematica delle comunicazioni*, Etas Libri, Milano 1971).

# Capitolo 9

# Miglioramento della qualità delle immagini distorte e alterate dal rumore

## 9.1 Introduzione

Le immagini disponibili in pratica nei diversi settori applicativi (vedi capp. 13-17) si presentano spesso con una qualità insufficiente per un'utilizzazione immediata, a causa di alterazioni introdotte da sistemi lineari e non lineari in presenza di disturbi e rumore di vario tipo. E' evidente quindi il grande interesse per tecniche in grado di migliorare, anche parzialmente, la qualità delle immagini stesse.

Nel capitolo 1 sono stati presentati gli aspetti principali dell'analisi delle immagini continue alterate da disturbi e rumore (§ 1.5), oltre alle proprietà dei sistemi bidimensionali (in particolare di tipo lineare) (§ 1.4).

Nel capitolo 6 sono state descritte diverse elaborazioni locali spaziali, utili per migliorare la qualità delle immagini numeriche, mentre nei capitoli 3-7 è stata sottolineata l'utilità del filtraggio numerico (in particolare di tipo passa-basso) per ridurre disturbi e alterazioni o rumore in determinate bande delle frequenze spaziali.

In questo capitolo sono presentate prima alcune tecniche relativamente semplici (in particolare con operatori locali spaziali), poi più complesse, per il miglioramento della qualità delle immagini numeriche.

## 9.2 Uso di operatori locali spaziali

Nel paragrafo 6.3 è stata descritta la semplice tecnica di espansione della scala dei livelli di grigio per ottenere esaltazione dei contrasti nell'immagine numerica in esame. Già questa tecnica di per sé è molto utile per migliorare la qualità dell'immagine. In presenza di rumore e disturbi predominanti alle alte frequenze spaziali, è conveniente applicare, prima dell'esaltazione dei contrasti precedenti, l'operatore locale che effettua la media aritmetica o filtraggio passa-basso (vedi § 6.6) mediante le relazioni [6.1] e [6.2]. Le due tecniche applicate insieme uniscono a una semplicità ancora notevole

una buona efficienza, sufficiente per molte applicazioni pratiche, con il vantaggio (spesso di primaria importanza) di una grande velocità di elaborazione.

Altre tecniche di elaborazione locale spaziale si basano sull'analisi dell'istogramma dei livelli di grigio (§ 6.5). Una volta, infatti, che sia valutato tale istogramma, dalla sua analisi si può verificare che determinati intervalli di livelli di grigio di pratico interesse presentano una distribuzione piccola (cioè pochi pixel hanno tali livelli di grigio): con opportune tecniche dette di variazione o equalizzazione dell'istogramma si può variare la distribuzione di ampiezza al fine desiderato. Una situazione spesso verificata corrisponde ad avere molti pixel con luminosità inferiore al valore medio e quindi con scarso contrasto; sono state definite diverse tecniche per modificare tale situazione: alcune con modifica dei livelli di grigio in modo da ottenere un'immagine con istogramma uniforme (Andrews, Tescher, Kruger, 1972; Hall, 1974), altre con modifiche dei livelli per ottenere istogrammi di forma esponenziale o iperbolica (Pratt, 1978).

Un particolare operatore locale spaziale del tipo $3 \cdot 3$ (§ 6.8) per l'esaltazione dei bordi e l'estrazione dei contorni in immagini anche alterate dal rumore è descritto di seguito (Cappellini, Odorico, 1981).

Facendo riferimento alla figura 6.5, e indicando con $T \geqslant 0$ un opportuno valore di soglia, effettuiamo i seguenti confronti e decisioni fra i livelli di grigio $f_i$ rispetto al livello centrale $f_5$:

$$|f_i - f_5| \leqslant T \quad \text{poniamo allora} \quad f_i = f_5 = 0 \qquad [9.1]$$

$$|f_i - f_5| > T \quad \text{poniamo allora} \quad f_i \neq f_5 = 1 \qquad [9.2]$$

essendo $i = 1, \ldots, 9$ escluso $i = 5$. Le operazioni precedenti [9.1] e [9.2] corrispondono ad assegnare a ogni pixel nel blocco $3 \cdot 3$ considerato solo un valore binario, cioè 0 (ad esempio bianco) oppure 1 (ad esempio nero). In questo modo si ottengono 256 possibili configurazioni per il blocco $3 \cdot 3$. Queste configurazioni possono essere classificate in due gruppi principali: quelle corrispondenti a stimare il pixel centrale (con valore originario di grigio $f_5$) come appartenente a un bordo o contorno e le altre per le quali ciò non vale. Per effettuare questa classificazione, assegnamo a ogni configurazione delle 256 possibili una certa probabilità $p_j$ di avere il pixel centrale facente parte di un bordo o contorno. Con criteri, in parte euristici in parte basati su stima a massima verosimiglianza, definiamo le seguenti classi di configurazioni:

(1) classe di 28 configurazioni (tab. 9.1) aventi la massima probabilità $p_1$ che il pixel centrale (con livello $f_5$) appartenga a un bordo o contorno;
(2) classe di 4 configurazioni (tab. 9.1) aventi una probabilità $p_2 < p_1$ che il pixel centrale sia un punto di contorno;
(3) classe di configurazioni che differiscono per un pixel da quelle della classe 1, escluse le 4 configurazioni della classe seguente (mostrate in tab. 9.1), aventi probabilità $p_3 < p_2 < p_1$;
(4) classe di tutte le configurazioni, che differiscono dalle altre delle classi (1), (2),

(3), (5), comprendenti le 4 configurazioni di tabella 9.1, aventi probabilità $p_4 < p_3 <$ $< p_2 < p_1$;
(5) classe di 2 configurazioni (tab. 9.1), aventi la minima probabilità $p_5$.

Le 5 classi precedenti possono essere ulteriormente divise in 5 sottoclassi, tenendo conto dell'orientazione o direzione del contorno rispetto agli assi di riferimento spaziale $(x, y)$: 1) verticale; 2) orizzontale; 3) obliquo a 45°; 4) obliquo a −45°; 5) punto di incrocio di contorni (orientazione mista). Ad esempio con 1-2 viene rappresentata una configurazione della prima classe 1 con orientazione orizzontale del contorno (Cappellini, Odorico, 1981).

La separazione nei due gruppi principali sopra indicati (punto di contorno o no) può essere effettuata, basandosi sulla precedente classificazione, con criteri flessibili in relazione ai diversi tipi di immagini numeriche da elaborare. La separazione può in particolare essere effettuata tenendo in conto la presenza di disturbi e di rumore nell'immagine, utilizzando come parametro di controllo il valore della soglia $T$ nelle relazioni [9.1] e [9.2]. Una regola di separazione risultata anche sperimentalmente utile è la seguente:

(*a*) con rumore stimato o misurato di modesta entità nell'immagine, considerare configurazioni di contorno (cioè col punto centrale di contorno) quelle della classe 1, usando una valore piccolo della soglia $T$;
(*b*) con rumore stimato o misurato di notevole entità nell'immagine, considerare configurazioni di contorno quelle della classe 1, della classe 2 ed eventualmente anche della classe 3, usando valori più elevati della soglia $T$.

Una caratteristica interessante della tecnica indicata è che essa può essere facilmente adattata alle proprietà locali del rumore nell'immagine elaborata, sia scegliendo

**Tabella 9.1** Tipiche configurazioni appartenenti alle varie classi

| classe 1 | classe 2 | classe 4 | classe 5 |
|---|---|---|---|
| 100 111 001 111 110 111 001 000 | 100 001 000 000 | 010 000 000 000 | 000 111 |
| 100 100 001 001 100 001 001 100 | 000 000 000 000 | 000 001 100 000 | 000 101 |
| 111 100 111 001 100 000 011 111 | 000 000 001 100 | 000 000 000 010 | 000 111 |
| 110 011 000 000 011 000 100 111 | | | |
| 100 001 001 100 001 001 100 100 | | | |
| 000 000 011 110 001 111 110 000 | | | |
| 001 000 100 111 110 001 000 000 | | | |
| 001 000 100 000 000 001 000 100 | | | |
| 001 111 100 000 000 000 011 100 | | | |
| 011 000 000 100 | | | |
| 000 001 000 100 | | | |
| 000 001 110 000 | | | |

diversamente le configurazioni di contorno sia variando $T$. La tecnica presenta inoltre il vantaggio (ad esempio con la separazione indicata in $a$)) di essere realizzabile in modo molto veloce, in quanto in sostanza, per decidere se una configurazione dell'immagine (blocco $3 \cdot 3$) è di contorno oppure no, si tratta di confrontare una tabella fissa di decisione facilmente memorizzabile.

Un esempio di applicazione della precedente tecnica è mostrato nella tavola 7A, B.

## 9.3 Filtraggio numerico inverso

Facendo riferimento a quanto presentato nel paragrafo 1.6 sui modelli di rappresentazione delle immagini con rumore, consideriamo il caso di rumore additivo (vedi fig. 1.3) corrispondente alla seguente relazione (analoga alla [1.70] togliendo la variabile tempo):

$$f_r(x,y)=f(x,y)\circledast h(x,y)+n_a(x,y) \tag{9.3}$$

ove $f(x, y)$ è l'immagine originaria senza rumore, $f_r(x, y)$ è l'immagine disponibile con rumore e $h(x, y)$ individua la risposta impulsiva del sistema lineare di trasferimento dell'immagine $f(x, y)$. Alla relazione [9.3] corrisponde, nel dominio delle frequenze angolari spaziali, la relazione seguente:

$$F_r(\omega_x, \omega_y)=F(\omega_x, \omega_y)H(\omega_x, \omega_y)+N_a(\omega_x, \omega_y) \tag{9.4}$$

ove $F_r(\omega_x, \omega_y)$ e $F(\omega_x, \omega_y)$ sono le trasformate 2D di $f_r(x,y)$ e $f(x,y)$, $H(\omega_x, \omega_y)$ è la funzione di trasferimento del sistema lineare a $N_a(\omega_x, \omega_y)$ è la trasformata 2D di $n_a(x,y)$.

Trascurando per il momento il rumore, le relazioni [9.3] e [9.4] divengono più semplicemente:

$$f_r(x,y)=f(x,y)\circledast h(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty} h(\alpha,\beta)f(x-\alpha,y-\beta)\,d\alpha d\beta \tag{9.5}$$

$$F_r(\omega_x, \omega_y)=F(\omega_x, \omega_y)H(\omega_x, \omega_y). \tag{9.6}$$

Si definisce filtro 2D inverso quel filtro che ha la seguente risposta in frequenza:

$$H_i(\omega_x, \omega_y)=\frac{1}{H(\omega_x, \omega_y)} \tag{9.7}$$

cioè pari all'inverso della risposta in frequenza o funzione di trasferimento del sistema lineare sopra considerato. E' evidente che l'applicazione del filtro avente la risposta in frequenza $H_i(\omega_x, \omega_y)$ all'immagine con rumore $f_r(x, y)$ teoricamente permette di riottenere l'immagine originaria $f(x,y)$.

Il problema del filtraggio inverso, anche conoscendo la $h(x,y)$ o $H(\omega_x, \omega_y)$ non è però così semplice in quanto, facendo ad esempio riferimento alla relazione [9.5], si

tratta di risolvere un'equazione integrale per riottenere $f(x, y)$ con il fatto che anche piccole perturbazioni in $f_r(x, y)$ possono dar luogo a perturbazioni estremamente grandi in $f(x, y)$ da ottenere (lemma di Riemann-Lebesgue) (Hunt, 1975). Facendo riferimento alle relazioni [9.6] e [9.7], è peraltro evidente che, se la funzione $H(\omega_x, \omega_y)$ ha degli zeri o intervalli in cui è zero, il rapporto $F_r(\omega_x, \omega_y)/H(\omega_x, \omega_y)$ avrà valori, a certe frequenze spaziali, divergenti (tendenti all'infinito).

Le precedenti considerazioni si trasferiscono facilmente al campo numerico, considerando le immagini campionate (con i ben noti criteri; vedi cap. 3) e al posto della trasformata 2D continua di Fourier la trasformata 2D discreta di Fourier (DFT, in pratica trasformata veloce FFT; vedi cap. 5).

Il problema del filtraggio inverso, considerando le relazioni trasformate con DFT o FFT, consiste nell'avere ad esempio la DFT della risposta impulsiva campionata del sistema lineare 2D discreto di trasferimento. In pratica la stima $F(k_1, k_2)$ della DFT dell'immagine originaria espressa dalla relazione:

$$\hat{F}(k_1, k_2) = H_i(k_1, k_2) F_r(k_1, k_2) = \frac{F_r(k_1, k_2)}{H(k_1, k_2)} \qquad [9.8]$$

verrà effettuata accertandosi che la $H(k_1, k_2)$ non abbia zeri o, nel caso che ciò si verifichi, modificando la forma della $H(k_1, k_2)$ in corrispondenza degli zeri stessi.

Un filtro numerico di notevole interesse, come approssimazione di filtri inversi per le immagini, è rappresentato dal filtro parabolico, che deriva il suo nome dalla forma a parabola della risposta in frequenza, esprimibile a una dimensione (nel caso continuo) con:

$$H(\omega) = \begin{cases} a\omega^2 & \text{per} \quad 0 \leqslant \omega \leqslant \omega_t \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad [9.9]$$

ove $a$ è il parametro che definisce la forma della parabola passante per l'origine degli assi ($\omega = 0$) e $\omega_t$ è la pulsazione di taglio. Nel caso 2D il filtro parabolico è ottenuto con la rotazione circolare del filtro espresso dalla [9.9] che, come noto (vedi la [7.25]) è facilmente ottenibile sostituendo $\omega$ con $\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$. Ritornando d'altra parte a quanto descritto nel paragrafo 2.7 sulle pellicole fotografiche e sul processo con cui le immagini vengono impressionate su esse, è ben nota la curva di figura 2.9, che lega la densità $D$ (in pratica il grado di conversione dei granuli di alogenuri di argento in argento, e quindi l'entità con cui la pellicola è impressionata dalla luce; in definitiva il livello di grigio nell'immagine sviluppata ad esempio in bianco e nero) al logaritmo di $E$, essendo $E = IT$ (relazione [2.11]) l'energia per unità di area, $I$ l'intensità della luce incidente e $T$ il tempo di esposizione. La curva $D \ln E$ di figura 2.9 dice in sostanza che la densità $D$ e il livello di grigio corrispondente nell'immagine sviluppata crescono meno che proporzionalmente rispetto a $E$ ovvero, per un certo tempo $T$ fisso, rispetto all'intensità della luce incidente (più esattamente, se nel tratto lineare della figura 2.9 si ammette che valga la relazione $D = k \ln E$, ciò equivale al legame

$e^{D/k}=E$). Ciò corrisponde ancora a dire che, nel processo di acquisizione fotografica, si ha un appiattimento dell'immagine ai livelli di grigio elevati (alta intensità di luce originaria) che equivale, nel caso di rapide variazioni spaziali dell'intensità di luce ovvero di alte frequenze spaziali, a un appiattimento dei relativi livelli di grigio elevati corrispondenti alle transizioni spaziali rapide.

E' evidente che l'attenuazione dei livelli di grigio alle alte frequenze spaziali può essere più o meno compensata con l'uso di un filtro parabolico, che invece esalta i valori alle frequenze spaziali più elevate. Per queste sintetiche considerazioni, come confermato dalle esperienze pratiche, il filtro numerico parabolico è di grande utilità per il miglioramento del contrasto e della qualità di immagini ottenute con processi fotografici (situazione così frequente nei diversi settori applicativi).

Si può provare che la risposta impulsiva campionata di un filtro numerico 2D corrispondente alla rotazione della risposta in frequenza [9.9] è esprimibile nella seguente forma (Giovani, 1981):

$$h(k_1,k_2)=\frac{a\omega_t^3}{2\pi\sqrt{k_1^2+k_2^2}}\left[J_1\left(\omega_t\sqrt{k_1^2+k_2^2}\right)-\frac{2}{\omega_t\sqrt{k_1^2+k_2^2}}J_2\left(\omega_t\sqrt{k_1^2+k_2^2}\right)\right] \qquad [9.10]$$

ove $J_1$ e $J_2$ sono funzioni di Bessel di prima e seconda specie. Applicando un'opportuna funzione finestra $w(k_1, k_2)$ del tipo indicato nel paragrafo 7.3, che moltiplichi i valori $h(k_1, k_2)$ della [9.10], si ottiene immediatamente il filtro numerico 2D FIR con risposta in frequenza del tipo espresso dalla [7.22].

Le tavole 8, 9 mostrano un esempio di filtro numerico 2D FIR parabolico con funzione finestra $w_C(k_1, k_2)$ (relazione [7.14]), mentre la tabella 9.2 riporta i valori dei coefficienti (matrice $7 \cdot 7$).

Per mostrare un esempio di applicazione pratica del filtro numerico parabolico in confronto con il filtro inverso (approssimato), consideriamo una delle alterazioni tipiche in tanti processi di ripresa e produzione delle immagini con sistemi ottici: lo sfuocamento, corrispondente a non avere perfettamente a fuoco il sistema ottico (in genere obiettivo) della macchina da ripresa (macchina fotografica, telecamera, sensore di rilevamento spaziale...).

E' noto (Cannon, 1976) che la risposta impulsiva del sistema lineare che descrive quest'alterazione di ripresa (sfuocamento o *blurring*) è espressa dalla seguente relazione (con simmetria circolare):

$$h(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi R^2} & \text{per} \quad \sqrt{x^2+y^2}\leqslant R\\[2ex] 0 & \text{per} \quad \sqrt{x^2+y^2}>R\end{cases} \qquad [9.11]$$

essendo $R$ una costante legata al sistema ottico sfuocato.

La forma campionata della [9.11] permette di individuare attraverso la DFT la risposta del sistema discreto $H(k_1, k_2)$ e quindi del filtro inverso $H^{-1}(k_1, k_2)$.

Tabella 9.2 Matrice dei coefficienti di un filtro numerico 2D FIR parabolico (dimensione 7 · 7) con parametro $a = 0{,}5$, frequenza angolare di taglio $\omega_t = 1$ e risposta impulsiva campionata espressa dalla [9.10], pesata con finestra di Cappellini $w_C(k_1, k_2)$ che usa funzioni di Weber

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,01222 | −0,03676 | 0,00047 | 0,00353 | 0,00047 | −0,03676 | 0,01222 |
| −0,03676 | 0,00120 | 0,00176 | −0,01035 | 0,00176 | 0,00120 | −0,03676 |
| 0,00047 | 0,00176 | −0,17648 | −0,03469 | −0,17648 | 0,00176 | 0,00047 |
| 0,00353 | −0,01035 | −0,03469 | 1,93789 | −0,03469 | −0,01035 | 0,00353 |
| 0,00047 | 0,00176 | −0,17648 | −0,03469 | −0,17648 | 0,00176 | 0,00047 |
| −0,03676 | 0,00120 | 0,00176 | −0,01035 | 0,00176 | 0,00120 | −0,03676 |
| 0,01222 | −0,03676 | 0,00047 | 0,00353 | 0,00047 | −0,03676 | 0,01222 |

Tabella 9.3 Matrice dei coefficienti di un filtro numerico inverso per correggere lo sfuocamento di un sistema ottico descritto dalla risposta impulsiva [9.11]

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −0,00082 | 0,00707 | −0,00026 | −0,00375 | −0,00375 | −0,00026 | 0,00707 | −0,00082 |
| 0,00707 | −0,00573 | 0,00095 | −0,00490 | −0,00490 | −0,00095 | −0,00573 | 0,00707 |
| −0,00026 | 0,00095 | −0,06296 | −0,01652 | −0,01652 | −0,06296 | 0,00095 | −0,00026 |
| −0,00375 | −0,00490 | −0,01652 | 0,77516 | 0,77516 | −0,01652 | −0,00490 | −0,00375 |
| −0,00375 | −0,00490 | −0,01652 | 0,77516 | 0,77516 | −0,01652 | −0,00490 | −0,00375 |
| −0,00026 | 0,00095 | −0,06296 | −0,01652 | −0,01652 | −0,06296 | 0,00095 | −0,00026 |
| 0,00707 | −0,00573 | 0,00095 | −0,00490 | −0,00490 | 0,00095 | −0,00573 | 0,00707 |
| −0,00082 | 0,00707 | −0,00026 | −0,00375 | −0,00375 | −0,00026 | 0,00707 | −0,00082 |

La tavola 10 mostra un esempio di applicazione di un filtro inverso per sfuocamento, ottenuto con procedimento sopra indicato (usando il metodo di Gauss-Jordan per l'inversione della matrice) con la matrice dei coefficienti (8 · 8) riportata in tabella 9.3, in confronto con il filtro parabolico precedente di tavola 9. Come si può vedere, il filtro parabolico (peraltro con 49 coefficienti invece di 64) presenta un'efficienza paragonabile a quella del filtro inverso.

Nelle considerazioni sul filtraggio inverso sopra riportate, si è trascurato la presenza del termine di rumore additivo $n_a(x, y)$ (relazione [9.3]) o sua trasformata $N_a(\omega_x, \omega_y)$ (relazione [9.4]).[1] Poiché spesso il rumore e i disturbi sono localizzati alle alte frequenze spaziali (in particolare effetti di fluttuazione o disturbi (*spike*) locali e puntiformi), una tecnica abbastanza semplice per migliorare l'efficienza del filtraggio inverso o parabolico numerico descritto consiste nel delimitare opportunamente la frequenza di taglio in modo da effettuare anche una certa azione di filtraggio passa-basso (si possono anche usare due filtri parabolici in cascata).

Per lo scopo precedente di riduzione del rumore alle alte frequenze spaziali sono noti anche filtri numerici 2D molto semplici con matrici di coefficienti 3 · 3, che possono essere utilizzati come pre-elaborazione dell'immagine con rumore prima di altre operazioni più complesse. Alcuni esempi di questi filtri (valori dei coefficienti) sono mostrati in tabella 9.4.

[1] L'applicazione del filtro inverso lascia, come indicato dalla [9.4], l'errore $N_a(\omega_x, \omega_y)/H(\omega_x, \omega_y)$.

Tabella 9.4 Alcuni esempi di filtri numerici 2D (matrice dei coefficienti) per riduzione del rumore alle alte frequenze spaziali (i valori sono normalizzati per non introdurre traslazione di scala dei livelli di grigio)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1/9 | 1/9 | 1/9 | 1/10 | 1/10 | 1/10 | 1/16 | 1/8 | 1/16 |
| 1/9 | 1/9 | 1/9 | 1/10 | 1/5 | 1/10 | 1/8 | 1/4 | 1/8 |
| 1/9 | 1/9 | 1/9 | 1/10 | 1/10 | 1/10 | 1/16 | 1/8 | 1/16 |

## 9.4 Tecniche con falso colore e pseudocolore

Per migliorare la qualità delle immagini numeriche (specialmente nel caso di piccola alterazione da effetti di rumore o disturbi, o dopo avere ridotto questi effetti con filtri di pre-elaborazione del tipo mostrato in tabella 9.4 o con operatori locali spaziali del tipo filtro passa-basso) può essere adottata una tecnica di trasposizione dell'immagine a colori o in bianco-nero in esame in falso colore o pseudocolore (Pratt, 1978).

La tecnica del falso colore consiste in una trasformazione punto-punto di un'immagine a colori originale, descritta dai tre colori primari (rosso, verde e blu), in una rappresentazione a colori nella quale i colori assegnati ai vari pixel sono funzioni lineari o non lineari dei tre colori primari originari nei pixel stessi. Scopo di questa trasformazione è quello di fornire un'immagine nella quale gli oggetti presentano colori falsi o diversi da quelli originali al fine di evidenziarli maggiormente dal contesto dell'immagine o di richiamare l'attenzione dell'osservatore per non assuefarlo ai colori uguali. Tale trasformazione è anche giustificata dalla conoscenza della risposta dell'occhio umano e del processo di acquisizione dell'informazione cromatica (vedi cap. 2). Come è stato indicato (§ 2.2), la risposta dei bastoncelli e dei coni della retina ha un massimo nella zona del verde dello spettro visibile: pertanto può convenire di trasportare un oggetto di un certo colore (rosso, giallo...) al colore verde in modo che sia più facilmente riconoscibile. Un'altra proprietà psicofisica della visione cromatica è legata all'elevata sensibilità al contrasto nella zona del blu: pertanto può convenire trasformare i colori originari in variazioni del colore blu.

Un semplice esempio di trasposizione in falso colore è definito dalla seguente relazione:

$$\begin{vmatrix} R_f \\ V_f \\ B_f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_v \\ V_v \\ B_v \end{vmatrix} \qquad [9.12]$$

che corrisponde a vedere rossi oggetti originari verdi, verdi oggetti originari blu e blu oggetti originari rossi.

Una trasformazione generale lineare in falso colore può analogamente essere defi-

nita mediante la relazione (Pratt, 1978):

$$\begin{vmatrix} R_f \\ V_f \\ B_f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_v \\ V_v \\ B_v \end{vmatrix}. \qquad [9.13]$$

La tecnica dello pseudocolore consiste in una trasformazione di un'immagine in bianco-nero originale in una presentazione a colori. L'immagine $f(n_1, n_2)$ è cioè convertita in forma cromatica con le tre immagini nel rosso, verde e blu aventi valori punto-punto definiti da una relazione del tipo seguente:

$$\begin{aligned} r(n_1, n_2) &= T_r f(n_1, n_2) \\ v(n_1, n_2) &= T_v f(n_1, n_2) \\ b(n_1, n_2) &= T_b f(n_1, n_2) \end{aligned} \qquad [9.14]$$

ove $T_r$, $T_v$ e $T_b$ possono essere operatori lineari o non lineari (vedi cap. 1). Questa trasformazione definisce un certo percorso nello spazio dei tre colori in funzione dei dati originari monocromatici $f(n_1, n_2)$, come indicativamente mostrato in figura 9.1: la linea retta $A$ rappresenta il percorso acromatico (bianco-nero) attraverso tutte le variazioni del grigio, mentre il percorso $B$ è un percorso del tipo a spirale attraverso

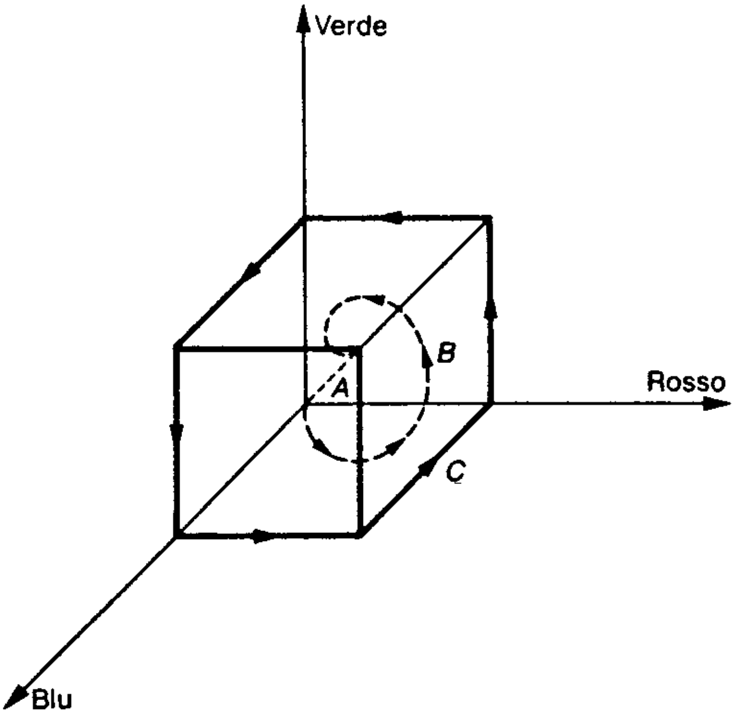



**Figura 9.1**
Cubo dei colori per illustrare la tecnica dello pseudocolore con tre percorsi: $A$, percorso acromatico (bianco-nero) con tutte le variazioni del grigio; $B$, percorso del tipo a spirale attraverso lo spazio dei colori; $C$, percorso che esclude ogni variazione di grigio e segue solo i bordi del cubo dei colori.

lo spazio dei colori. Un altro percorso mostrato in figura 9.1 è il $C$, che esclude ogni variazione di grigio e segue i bordi del cubo dei colori.

E' interessante notare che la luminosità della scala in pseudocolore varia da un minimo di 0,114 per il blu a un massimo di 0,886 per il giallo (Pratt, 1978).

## 9.5. Filtraggio del tipo di Wiener

Per migliorare la ricostruzione dell'immagine alterata da rumore, rispetto alla tecnica del filtraggio inverso che di fatto non considera la presenza del rumore, sono state sviluppate diverse tecniche, basate sul filtro di Wiener, nelle quali viene utilizzata una conoscenza statistica a priori del rumore (Pratt, 1978).

Facendo riferimento al modello additivo (relazione [9.3] e [9.4], fig. 1.3), ammettiamo che il rumore abbia media nulla, sia indipendente dall'immagine $f(x, y)$ e abbia densità spettrale di potenza pari a $G_n(\omega_x, \omega_y)$ (vedi la relazione [1.68]).

In un filtro di Wiener continuo la risposta impulsiva del filtro stesso è scelta in modo tale da minimizzare l'errore quadratico medio di ricostruzione (*restoration*):

$$e_r = E\{[f(x,y) - \hat{f}(x,y)]^2\} \qquad [9.15]$$

ove $E$ indica la media (vedi la [1.60]) e $\hat{f}(x, y)$ è l'immagine ricostruita o stimata. La funzione di trasferimento del filtro risultante continuo ha l'espressione (Helstrom, 1967):

$$H_W(\omega_x, \omega_y) = \frac{H^*(\omega_x, \omega_y)}{|H(\omega_x, \omega_y)|^2 + G_n(\omega_x, \omega_y)} \qquad [9.16]$$

ove $H(\omega_x, \omega_y)$ è la funzione di trasferimento del sistema lineare. Si verifica che, con assenza di rumore, il filtro di Wiener si riduce al semplice filtro inverso.

Migliore ricostruzione si può in genere ottenere se si tiene conto della correlazione spaziale dell'immagine (come conoscenza statistica a priori); il filtro risultante ha l'espressione seguente della funzione di trasferimento:

$$H_{W1}(\omega_x, \omega_y) = \frac{H^*(\omega_x, \omega_y)}{|H(\omega_x, \omega_y)|^2 + G_n(\omega_x, \omega_y/G_f(\omega_x, \omega_y)} \qquad [9.17]$$

ove $G_f(\omega_x, \omega_y)$ è la densità spettrale di potenza dell'immagine in esame. E' interessante osservare che la relazione [9.17] esprime la funzione di trasferimento del filtro di Wiener in funzione del rapporto segnale/rumore (potenze):

$$RSR(\omega_x, \omega_y) = \frac{G_f(\omega_x, \omega_y)}{G_n(\omega_x, \omega_y)}. \qquad [9.18]$$

L'espressione del filtro 2D numerico, corrispondente a quella indicata dalla [9.17],

risulta:

$$H_{W1}(k_1,k_2)=\frac{H^*(k_1,k_2)}{|H(k_1,k_2)|^2+G_n(k_1,k_2)/G_f(k_1,k_2)}. \qquad [9.19]$$

L'immagine ricostruita con il precedente filtro di Wiener risulta avere una trasformata 2D discreta di Fourier, DFT, espressa dalla seguente relazione (tenendo conto della [9.4]):

$$F(k_1,k_2)=H_{W1}(k_1,k_2)F_r(k_1,k_2). \qquad [9.20]$$

Sono stati proposti diversi tipi di filtri di ricostruzione connessi in modo più o meno stretto al filtro di Wiener precedente (Pratt, 1978).

Un filtro, di struttura simile a quello di Wiener, può essere definito con metodi del tipo minimi quadrati vincolati (*constrained-least-squares estimation*) (Hunt, 1973). Il filtro è definito dalla seguente relazione:

$$H_c(k_1,k_2)=\frac{H^*(k_1,k_2)}{|H(k_1,k_2)|^2+\lambda|C(k_1,k_2)|^2} \qquad [9.21]$$

ove $\lambda$ è un parametro determinato dal processo di iterazione e $C(k_1,k_2)$ è la DFT di una matrice di limitazione (*constraint matrix*) ammessa esprimibile in forma di Toeplitz. Dal filtro espresso dalla [9.21] è possibile definire un'intera famiglia di filtri, di cui quello di Wiener (relazione [9.19]) è un caso particolare.

## 9.6 Filtraggio omomorfo

Il filtraggio omomorfo, indicato in figura 9.2, è una tecnica di ricostruzione (*restoration*) di immagini con rumore, particolarmente utile quando l'immagine è alterata da disturbi o rumore moltiplicativi (vedi la relazione [1.71] e la fig. 1.2). Consideriamo un'immagine continua $f_r(x,y)$:

$$f_r(x,y)=f(x,y)n_m(x,y) \qquad [9.22]$$

costituita da un'immagine originaria senza rumore $f(x,y)$ moltiplicata per una funzione 2D $n_m(x,y)$ rappresentante il rumore moltiplicativo (o, ad esempio, una distribuzione non uniforme di illuminazione nell'immagine acquisita).

Se si prendono i logaritmi di entrambi i membri della [9.22], si ottiene:

$$\log[f_r(x,y)]=\log[f(x,y)]+\log[n_m(x,y)]. \qquad [9.23]$$

E' evidente che le tecniche di filtraggio lineare per rumore additivo possono ora essere facilmente applicate alla [9.23] per stimare il $\log[f(x,y)]$. Effettuando poi l'esponenziale dei dati ottenuti, si ottiene una stima della $f(x,y)$: $\hat{f}(x,y)$.

Sulla base delle considerazioni precedenti è stato definito il filtro di ricostruzione

Figura 9.2
Schema illustrativo del filtraggio omomorfo: si effettua prima una trasformazione logaritmica, quindi si applica un filtro lineare; infine si effettua una trasformazione esponenziale, per tornare dalla rappresentazione logaritmica a quella originale.

omomorfo, espresso in forma numerica dalla relazione seguente (Oppenheim, Schafer, Stockham jr, 1968; Cannon, 1974):

$$H_H(k_1, k_2) = \left[ \frac{1}{|H(k_1, k_2)|^2 + G_n(k_1, k_2)/G_f(k_1, k_2)} \right]^{1/2}. \qquad [9.24]$$

Considerando una funzione impulsiva campionata (*point-spread-function*) con fase zero, il filtro omomorfo precedente risulta essere equivalente alla media geometrica tra il filtro di Wiener (relazione [9.19]) e il filtro inverso:

$$H_i(k_1, k_2) = \frac{1}{H(k_1, k_2)}$$

(vedi anche le [9.7] e [9.8]).

## 9.7 Filtraggio alla Kalman

E' ben noto che il filtro di Kalman è un filtro ottimo per la ricostruzione di segnali e dati 1D, se sono verificate opportune ipotesi sui processi stocastici relativi ai segnali o ai dati e al rumore (Willsky, 1978).

Recentemente filtri alla Kalman sono stati applicati con buoni risultati all'elaborazione di immagini con rumore (Baroncelli, Del Bimbo, Zappa, 1980).

Per definire il filtro, si parte dalle seguenti relazioni di base:

$$f_r(n_1, n_2) = f(n_1, n_2) + n(n_1, n_2) \qquad [9.25]$$

ove $f_r(n_1, n_2)$ è l'immagine discreta osservata, di dimensioni $N \cdot M$ (cioè $(n_1, n_2) \in \in N \cdot M$), $f(n_1, n_2)$ rappresenta l'immagine discreta che deve essere estratta o ricostruita (considerata come un processo gaussiano, invariante a media nulla) e $n(n_1, n_2)$ rappresenta il rumore additivo (considerato come un processo gaussiano, invariante del tipo "rumore bianco");

$$f(n_1, n_2) = Hx(n_1, n_2) \qquad [9.26]$$

$$x(n_1, n_2 + 1) = Fx(n_1, n_2) + n(n_1, n_2) \qquad [9.27]$$

definiscono il modello di stato spaziale, ove $\dim[x(n_1, n_2)] = \dim[n(n_1, n_2)] = n$, $\dim H = 1 \cdot n$ e $F$ è una matrice stabile (cioè tutti i suoi *eigenvalues* sono in modulo minori di 1).

La stima 2D viene ricondotta a due stime ricorrenti 1D (Baroncelli, Del Bimbo, Zappa, 1980).

La tecnica precedente è stata applicata all'elaborazione di immagini in medicina nucleare (vedi cap. 14) con risultati promettenti.

## 9.8 Tecniche di ricostruzione basate sulla massima probabilità a posteriori MAP

Consideriamo la ricostruzione (*restoration*) dell'immagine con rumore come un processo stocastico (vedi § 1.5) definito dalla seguente relazione generale:

$$\bar{g} = T\{\bar{f}, \bar{n}\} \qquad [9.28]$$

ove $\bar{f}$ è il vettore che rappresenta l'immagine originaria, $\bar{g}$ il vettore che rappresenta l'immagine osservata disponibile, $\bar{n}$ è il vettore rumore e $T$ rappresenta un operatore generale che definisce la funzione di trasferimento del processo con rumore.

Una delle stime stocastiche $\hat{f}$ più comuni è quella che minimizza una qualche funzione media d'errore $\epsilon$, definita dalla relazione seguente:

$$\epsilon = E\{\psi(\bar{f} - \hat{f})/\bar{g}\} = \int \psi(\bar{f} - \hat{f})\, p(\bar{f}/\bar{g})\, \mathrm{d}\bar{f} \qquad [9.29]$$

ove $\psi$ è una funzione d'errore o di costo e $p(\bar{f}/\bar{g})$ è la densità di probabilità a posteriori del vettore immagine ideale $\bar{f}$, data l'osservazione del vettore dell'immagine disponibile $\bar{g}$. Se la funzione d'errore è l'errore quadratico medio (*mean-square-error*), la stima ottima è la cosiddetta stima di Bayes:

$$\hat{f} = E\{(\bar{f}/\bar{g})\} = \int \bar{f}\, p(\bar{f}/\bar{g})\, \mathrm{d}\bar{f} \qquad [9.30]$$

che rappresenta la media dell'immagine ideale condizionata a quella osservata.

Un'altra stima stocastica interessante è la cosiddetta stima con massima probabilità a posteriori (*maximum a posteriori probability*, MAP), che si basa sulla densità di probabilità a posteriori $p(\bar{f}/\bar{g})$, la cui conoscenza diretta non è necessaria, in quanto per il teorema di Bayes:

$$p(\bar{f}/\bar{g}) = \frac{p(\bar{g}/\bar{f})\, p(\bar{f})}{p(\bar{g})} \qquad [9.31]$$

e quindi è esprimibile in funzione delle densità di probabilità $p(\bar{f})$, $p(\bar{g})$ e $p(\bar{g}/\bar{f})$. Prendendo i logaritmi naturali e differenziando rispetto a $\bar{f}$, si ottiene l'equazione caratteristica seguente (Pratt, 1978):

$$\frac{\partial \ln[p(\bar{g}/\bar{f})]}{\partial \bar{f}} + \frac{\partial \ln[p(\bar{f})]}{\partial \bar{f}} = 0 \qquad [9.32]$$

che può essere risolta per stimare $\hat{f}$ ammettendo appropriati modelli per le densità di

probabilità $p(\bar{g}/\bar{f})$ e $p(\bar{f})$. Considerando il modello:

$$\bar{g}=T\{\bar{B}\bar{f}\}+\bar{n} \qquad [9.33]$$

ove $\bar{B}$ indica la matrice di alterazione e $T$ è un'operazione spaziale nota non lineare applicata a tutti gli elementi del vettore $\bar{B}\bar{f}$, e ammettendo processi gaussiani, è stata determinata una forma ricorsiva della [9.32] che può essere risolta con tecniche iterative (Hunt, 1975).

Quest'ultima tecnica MAP è stata realizzata e applicata con buoni risultati all'elaborazione di immagini numeriche (Cappellini, Del Re, Francolini, Taiuti, 1979, 1980).

## 9.9 Tecniche di ricostruzione 'cieche'

La maggior parte delle tecniche precedentemente descritte si basa su qualche conoscenza a priori del tipo di degradamento e di alterazione dell'immagine in esame; in particolare, spesso è assunta nota la risposta del sistema di trasferimento $h(x, y)$ o $H(\omega_x, \omega_y)$.

Sono state sviluppate tecniche in cui non è ammessa nessuna informazione a priori, nelle quali il tipo di degradazione viene stimato dall'immagine in esame: tali tecniche sono chiamate ricostruzione cieca (*blind restoration*) (Pratt, 1978). Vi sono tre approcci principali: misure dirette, stime indirette e stime iterative.

Nel caso di misura diretta, si cerca di ricavare la funzione impulsiva del sistema di trasferimento ($h(x, y)$) analizzando un oggetto dell'immagine riconoscibile (ad esempio, anche un semplice bordo o contorno). Poiché per definizione la risposta impulsiva cercata è l'immagine, nella scena osservata, di una sorgente puntiforme, la forma effettiva nell'immagine di un punto nella scena originale può fornire una stima della risposta impulsiva. Per quanto riguarda il rumore, la funzione di autocorrelazione o covarianza (o densità spettrale di potenza) del rumore può essere stimata misurando la funzione di autocorrelazione dell'immagine osservata in una zona con luminosità pressoché costante.

Nel caso di misura o stima indiretta, si ricorre a opportune valutazioni e rilievi medi nel tempo o nello spazio. Un esempio indicativo è rappresentato dalle immagini televisive. Consideriamo ad esempio la $i$-ma immagine osservata:

$$g_i(x,y)=f(x,y)+n_i(x,y) \qquad [9.34]$$

ove $f(x, y)$ è l'immagine senza rumore e $n_i(x, y)$ è un rumore additivo indipendente dalla $f(x, y)$. Se si ammette che l'immagine senza rumore $f(x,y)$ rimanga costante e immutata in una sequenza di $M$ scene (o *frames*), la si può ottenere attraverso la somma temporale delle successive immagini:

$$f(x,y)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} g_i(x,y)-\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} n_i(x,y). \qquad [9.35]$$

E' evidente che il termine di rumore a destra nella [9.35] tenderà al suo valore medio $E\{n(x, y)\}$ per $M$ opportunamente grande. Tale valore medio, nel caso di processo stocastico bianco gaussiano con media nulla, è zero, e pertanto una stima utile della $f(x, y)$ risulta essere:

$$\hat{f}(x,y) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} g_i(x,y). \qquad [3.96]$$

La tecnica di media precedente può essere utilizzata anche per stimare il valore medio della funzione impulsiva del sistema di trasferimento o degradazione $\hat{h}(x, y)$ o $\hat{H}(\omega_x, \omega_y)$ (Pratt, 1978).

Nel caso iterativo, si parte da una ragionevole ipotesi (anche molto grossolana) di effetti di degradazione dell'immagine (sistema di trasferimento e rumore additivo): ad esempio, per il rumore additivo si ammette che esso sia bianco gaussiano. Si ricostruisce l'immagine con una delle tecniche esposte nei precedenti paragrafi, si varia quindi l'ipotesi sul rumore (modificando leggermente il rumore bianco e gaussiano), si ricostruisce l'immagine e così via fino a che non si vede che le modifiche apportate al modello del rumore non danno luogo a un'immagine di qualità migliore, continuando a modificare il modello nel senso in cui la qualità dell'immagine ricostruita aumenta. Analogamente si può procedere per la risposta impulsiva $h(x, y)$ del sistema di trasferimento incognito.

## 9.10 Confronto fra le diverse tecniche di ricostruzione e miglioramento della qualità di immagini

La molteplicità di tecniche precedentemente esposte in modo sintetico dimostra la difficoltà del problema della ricostruzione di immagini distorte e alterate dal rumore, essenzialmente dovuta alla mancanza di informazioni sui sistemi che hanno degradato l'immagine (spesso di tipo non lineare) e sul tipo di rumore presente nell'immagine. Questo campo della elaborazione numerica delle immagini (e ovviamente anche della elaborazione continua) è pertanto uno dei più aperti e attualmente da sviluppare.[3]

Per immagini alterate da rumore di piccola entità (alto rapporto segnale-rumore), le semplici tecniche con operatori locali spaziali possono già dare buoni risultati. Per immagini degradate da sistemi di trasferimento e alterate da rumore di entità notevole (medio o basso rapporto segnale-rumore), il problema, ovviamente, è più difficile. Nel caso che il rumore sia localizzato essenzialmente alle alte frequenze spaziali, il filtraggio numerico 2D passa-basso o passa-banda può fornire risultati soddisfacenti. Quando si abbiano adeguate conoscenze sul sistema di trasferimento o degradazione, la tecnica del filtro numerico inverso (e filtro parabolico) risulta utile.

[3] Le tecniche presentate nei paragrafi precedenti si estendono all'elaborazione di immagini a colori, applicandole di volta in volta alle tre sottoimmagini (rosso, verde, blu).

Nel caso di immagini degradate da un sistema e alterate dal rumore, il filtraggio omomorfo è preferibile al filtraggio di Wiener. I filtraggi alla Kalman e del tipo MAP sono interessanti per certi tipi di immagini con rumore e hanno la caratteristica, utile per la realizzazione, di essere attuabili con operazioni ricorsive. Il filtraggio cieco, specialmente nel caso di indagine su immagini di cui non si conoscano ipotesi o modelli validi, costituisce una soluzione pratica spesso utile per definire meglio i termini del problema e ottenere stime sperimentali.

Nell'ampia varietà di tecniche disponibili, è da osservare che vanno acquistando importanza crescente tecniche di tipo non lineare applicate localmente nel campo spaziale. Un esempio interessante si basa sulla valutazione dell'istrogramma locale (Garibotto, Micca, 1981).

## Riferimenti bibliografici

Andrews H. C., Tescher A. G., Kruger R. P., *Image Processing by Digital Computer*, IEEE Spectrum, vol. 9, N. 7, 20-32 (1972).

Baroncelli L., Del Bimbo A., Zappa G., *Two-dimensional Kalman Filtering with Applications to the Restoration of Scintigraphic Images*, in Cappellini V., Costantinides A. G. (a cura di) "Digital Signal Processing" (Academic Press, Londra e New York 1980).

Cannon T. M., *Digital Image Deblurring by Nonlinear Homomorphic Filtering*, Tesi di dottorato, University of Utah, Computer Science Depart. (1974).

Cannon T. M., *Blind Deconvolution of Spatially Invariant Image Blurs whith Phase*, IEEE Trans. Acoustic Speech and Signal Processing, vol. ASSP-24, N. 1, 58-62 (1976).

Cappellini V., Odorico L., *A New Operator for Edge Detection*, in "Proceedings of IEEE Intern. Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing" (IEEE Press, Atlanta 1981).

– Del Re E., Francolini P., Taiuti G., *Some MAP Restoration Techniques with Application to Image Processing*, Report R15-79, Istituto di Elettronica, Facoltà di Ingegneria di Firenze (1979).

– *Advanced MAP Restoration Techniques with Application to Digital Image Processing*, in V. Cantoni (a cura di), "Proceedings of International Conference on Image Processing and Analysis" (Servizio Arti Grafiche, Pavia 1980).

Garibotto G., Micca G., *Local Histogram Image Processing*, CSELT Rapporti Tecnici, vol. 9, N. 2, 157-61 (1981).

Giovani M., *Sviluppo di tecniche di filtraggio numerico bidimensionale per l'elaborazione e la ricostruzione di immagini*, Tesi di laurea in Ingegneria elettronica, Università di Firenze (dicembre 1981).

Hall E. L., *Almost Uniform Distribution for Computer Image Enhancement*, IEEE Trans. on Computers, vol. C-23, N. 2, 207 sg. (1974).

Helstrom C. W., *Image Restoration by the Method of Least Squares*, J. Opt. Soc. Amer., vol. 57, 297-303 (1967).

Hunt B. R., *The Application of Constrained-least-squares-estimation to Image Restoration by Digital Computer*, IEEE Trans. on Computers, vol. C-22, 805-12 (1973).

– *Digital Image Processing*, Proceedings of the IEEE, vol. 63, N. 4, 693-708 (1975).

Oppenheim A. V., Schafer R. W., Stockham T. G. jr, *Nonlinear Filtering of Multiplied and Convolved Signals*, Proceedings of the IEEE, vol. 56, 1264-91 (1968).

Pratt. W. K., *Digital Image Processing* (Wiley, New York 1978).

Willsky A. S., *Relationships between Digital Signal Processing and Control and Estimation Theory*, Proceedings of the IEEE, vol. 66, N. 9, 996-1017 (1978).

# Capitolo 10

# Riconoscimento di configurazioni

## 10.1 Introduzione

Con il termine riconoscimento di configurazioni (*pattern recognition*) – peraltro di significato assai ampio e spesso non chiaramente definito nella letteratura – si intende riferirsi ai metodi e alle tecniche usate per l'individuazione, il riconoscimento e la classificazione di oggetti, forme o strutture nelle immagini analizzate.

Data la molteplicità di metodi e di approcci (alcuni di tipo euristico, altri con ben definite basi matematiche) fino ad ora sviluppati, in questo capitolo sono presentati prima i concetti di base per il riconoscimento di configurazioni o di forme e poi alcune delle più importanti tecniche disponibili, con riferimento all'analisi ed elaborazione di immagini discrete o numeriche.

## 10.2 Considerazioni generali sui metodi di riconoscimento di configurazioni

I molteplici metodi e tecniche per il riconoscimento di configurazioni o di forme possono essere divisi, da un punto di vista molto generale, in due gruppi principali (Fu, 1976; Gaglio, Morasso, Tagliasco, 1982): metodi e tecniche di tipo statistico (con prototipi), metodi e tecniche di tipo sintattico (o strutturale).

Nei metodi e tecniche del primo gruppo, un insieme di misure o caratteristiche significative (dette *features*) è estratto dalle configurazioni di interesse, e tali caratteristiche o *features* sono poi utilizzate per riconoscere e classificare le configurazioni stesse.

L'esempio più semplice di questo tipo è rappresentato dal cosiddetto riconoscimento a prototipi, nel quale sono note certe forme principali o prototipi e l'immagine in esame viene analizzata confrontando le sue diverse forme con i prototipi, attribuendole uguali ai diversi prototipi con criteri di somiglianza o minima distanza (cioè una forma dell'immagine è interpretata come uno dei prototipi, se tale forma è più

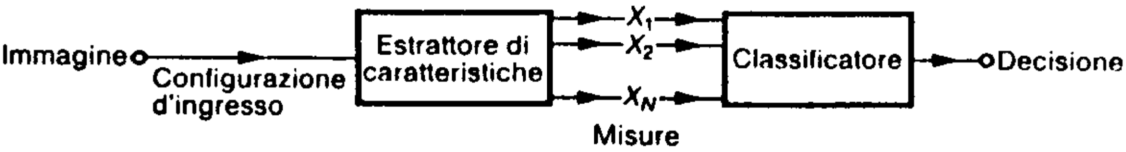



Figura 10.1
Schematizzazione del processo di riconoscimento di tipo statistico.

simile o meno distante delle altre nell'immagine dal prototipo stesso). I prototipi possono essere, ad esempio, forme geometriche (come triangoli, quadrati, cerchi ecc.) e il riconoscimento consiste nel determinare o stimare quali e/o quante di queste forme sono presenti in una determinata immagine.

Le tecniche di riconoscimento di tipo statistico possono essere più in generale schematizzate con il processo di figura 10.1. Dall'immagine in esame vengono estratte le caratteristiche significative o *features* (in genere supposte invarianti o comunque poco sensibili alle più comuni variazioni e distorsioni e contenenti informazioni essenziali non ridondanti). Di queste *features* vengono definite opportune misure atte a individuarle. Segue l'operazione importante di classificazione, che consiste nel classificare o identificare e raggruppare le configurazioni diverse individuate nell'immagine in esame. La macchina o sistema o programma che effettua le misure sulle caratteristiche è chiamata estrattore di caratteristiche (*features extractor*); la macchina o sistema o programma che effettua la classificazione è chiamata classificatore.

Nei metodi e tecniche del secondo gruppo si tiene conto dell'informazione strutturale, che descrive ogni configurazione. Questi metodi sono particolarmente adatti quando le configurazioni in esame sono assai complesse, tanto che il numero di *features* e misure sarebbe molto grande (esempio: riconoscimento di impronte digitali, di volti...). Nei metodi di questo gruppo, ogni configurazione viene descritta in modo strutturale, scomponendo la configurazioni in sottoconfigurazioni, ogni sottoconfigurazione in altre configurazioni o forme elementari più semplici e così via, con un tipico processo ad albero. In questo modo una certa configurazione viene a essere individuata da un particolare percorso o ramo dell'albero, con criteri (come nel gruppo precedente) di minima distanza.

## 10.3 Metodi di riconoscimento di tipo statistico

Consideriamo alcuni aspetti principali dei metodi di riconoscimento di tipo statistico (Fu, 1976; Levialdi, 1977).

Un aspetto importante riguarda il cosiddetto spazio delle caratteristiche (*features space*). Supponiamo che ogni configurazione nell'immagine in esame sia caratterizzata da $N$ caratteristiche o *features* (misurate dall'estrattore di fig. 10.1). Ogni particolare gruppo di $N$ caratteristiche può essere considerato come un vettore $\overline{X}$, detto vettore

delle *features* o delle caratteristiche, rappresentabile come un punto in uno spazio delle *features* a $N$ dimensioni $S_X$. Il problema del riconoscimento e classificazione è così ricondotto a determinare la corrispondenza fra un punto dello spazio $S_X$ e una certa configurazione. Ciò corrisponde in definitiva a dividere lo spazio delle caratteristiche in regioni ben definite disgiunte e non sovrapposte, ciascuna delle quali corrisponde a una e una sola configurazione. Matematicamente, se si indicano con $x_1, x_2, \ldots, x_N$ le $N$ caratteristiche, cioè:

$$\overline{X} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{vmatrix}. \qquad [10.1]$$

e si indicano con $C_1, C_2, \ldots C_m$ le diverse configurazioni di interesse, si ha una funzione discriminante $D_j(\overline{X})$ associata a ogni configurazione $C_j (j = 1, 2, \ldots m)$. Una configurazione estratta rappresentata dal vettore $\overline{X}$ corrisponderà ad una configurazione $C_i$ di interesse (cioè $\overline{X} \leftrightarrow C_i$) se il valore di $D_i(\overline{X})$ sarà massimo, cioè:

$$D_i(\overline{X}) > D_j(\overline{X}) \qquad i, j = 1, 2, \ldots, m \qquad i \neq j. \qquad [10.2]$$

Pertanto il contorno di decisione nello spazio delle caratteristiche $S_X$, fra regioni corrispondenti a configurazioni $C_i$ e $C_j$, è definito dalla seguente relazione:

$$D_i(\overline{X}) - D_j(\overline{X}) = 0. \qquad [10.3]$$

Sono di particolare utilità le funzioni discriminanti di tipo lineare, cioè esprimibili come combinazioni lineari delle $N$ misure delle caratteristiche:

$$D_i(\overline{X}) = \sum_{k=1}^{N} w_{ik} x_k \qquad i = 1, 2, \ldots m \qquad [10.4]$$

ove $w_{ik}$ sono opportuni pesi o coefficienti, che definiscono la combinazione lineare.

Un importante tipo di classificatori lineari è rappresentato dai classificatori a minima distanza (Fu, 1976), che usano la distanza fra la configurazione in esame (nell'immagine da analizzare) e una serie di vettori di riferimento (prototipi) o punti nello spazio delle caratteristiche nel processo di classificazione. Supponiamo che siano definiti $m$ vettori di riferimento $\overline{R}_1, \overline{R}_2, \ldots, \overline{R}_m$, con $\overline{R}_j$ associato alla configurazione $C_j$. Il criterio di classificazione a minima distanza rispetto a $\overline{R}_1, \overline{R}_2, \ldots, \overline{R}_m$ consiste nel classificare il vettore $\overline{X}$ d'ingresso corrispondente alla configurazione $C_i$ cioè $\overline{X} \leftrightarrow C_i$, se:

$$|\overline{X} - \overline{R}_i| \text{ è minimo} \qquad [10.5]$$

ove $|\overline{X} - \overline{R}_i|$ è la distanza fra $\overline{X}$ e $\overline{R}_i$.

In pratica è da tenere conto del rumore e delle fluttuazioni che alterano le misure

dell'estrattore delle caratteristiche. Le $N$ caratteristiche $x_1, x_2, ..., x_N$ saranno perciò alterate dal rumore. Se esse sono considerate variabili aleatorie (vedi cap. 1), $x_i$ indicherà ad esempio la misura con rumore della $i$-ma feature. Per ogni configurazione $C_j$ ($j = 1, 2, ..., m$) ammettiamo che la densità di probabilità (distribuzione) a $N$ dimensioni del vettore $\overline{X}$, cioè $p(\overline{X}/C_j)$, e la probabilità di $C_j$, cioè $P(C_j)$, siano note a priori. La funzione del classificatore è pertanto quella di effettuare la classificazione, minimizzando la probabilità di falso riconoscimento. Il problema della classificazione delle configurazioni può ora essere formulato come un problema di decisione statistica (provando $m$ ipotesi statistiche), definendo una funzione di decisione $d(\overline{X})$, ove $d(\overline{X})=d_i$ significa che l'ipotesi $I_i : \overline{X} \leftrightarrow C_i$ è accettata. Indichiamo con $L(C_i, d_j)$ la perdita o diminuzione del classificatore se viene effettuata la decisione $d_j$ quando la configurazione d'ingresso è in effetti $C_i$. La perdita condizionale o rischio condizionale si definisce nel modo seguente:

$$r(C_i, d) = \int_{S_X} L(C_i, d) p(\overline{X}/C_i) \, d\overline{X}. \qquad [10.6]$$

Per un insieme assegnato di probabilità a priori $P(C_1), P(C_2), ..., P(C_m)$, la perdita media o rischio medio risulta:

$$R(P, d) = \sum_{i=1}^{m} P(C_i) r(C_i, d) \qquad [10.7]$$

essendo $P = \{P(C_1), P(C_2), ..., P(C_m)\}$.

Sostituendo la [10.6] nella [10.7] si ottiene:

$$r_X(P, d) = \frac{\sum_{i=1}^{m} L(C_i, d) P(C_i) p(\overline{X}/C_i)}{p(\overline{X})} \qquad [10.8]$$

ove $r_X(P, d)$ rappresenta la perdita condizionale media a posteriori della decisione $d$ per un dato insieme di misure di caratteristiche $\overline{X}$. Infine la [10.7] può essere espressa nella seguente forma:

$$R(P, d) = \int_{S_X} p(\overline{X}) r_X(P, d) \, d\overline{X}. \qquad [10.9]$$

In particolare può essere utilizzato il criterio di decisione di Bayes; il corrispondente classificatore è detto classificatore di Bayes (Fu, 1976).

Un importante aspetto ulteriore nei processi di riconoscimento di tipo statistico è rappresentato dal fatto che spesso è più conveniente (per problemi di complessità e costo) effettuare le misure delle caratteristiche in modo sequenziale (specialmente quando le caratteristiche da misurare sono in gran numero). Si parla in questo caso di decisione sequenziale. Si parla anche, in relazione a procedimenti di questo tipo, di apprendimento sequenziale (con determinate proprietà di memoria) (Fu, 1976).

Molte tecniche sono state proposte per definire il raggruppamento di punti che definiscono una configurazione. Queste tecniche, dette di *clustering*, si basano su opportuni criteri di somiglianza fra gli oggetti o forme da riconoscere come specifiche configurazioni con partizioni, gerarchie, misure di distanze (anche di tipo adattivo).

## 10.4 Metodi di riconoscimento di tipo sintattico

Come già osservato, i metodi di riconoscimento di tipo sintattico o strutturale sono indicati per l'analisi di configurazioni più complesse, peraltro presenti in molti tipi di immagini praticamente disponibili.

La configurazione globale complessa viene scomposta in sottoconfigurazioni più semplici e queste in altre sottoconfigurazioni ancora più semplici e così via fino ad arrivare a quelle più elementari, dette primitive (Fu, 1976). Il processo di scomposizione avviene in genere con una tipica struttura ad albero, come già osservato. La descrizione della scomposizione della struttura della configurazione in esame in sottoconfigurazioni primitive viene anche chiamata linguaggio di descrizione della configurazione. Le regole che definiscono la composizione delle sottoconfigurazioni primitive in configurazioni globali costituiscono la cosiddetta grammatica del linguaggio di descrizione delle configurazioni. In sostanza si arriva a una sentenza che descrive una certa configurazione nel linguaggio scelto con la grammatica adottata, con lo scopo di poter descrivere anche un gran numero di configurazioni complesse usando gruppi abbastanza piccoli di sottoconfigurazioni primitive semplici con certe regole grammaticali. Un esempio di descrizione strutturale è indicato nella figura 10.2.

Le diverse relazioni od operazioni di composizione definite fra le sottoconfigurazioni possono in genere essere espresse in termini di operazioni logiche e/o matematiche. Ad esempio, se si sceglie la concatenazione come la relazione principale usata per descrivere le configurazioni, le sottoconfigurazioni primitive vengono organizzate in opportune successioni o stringhe per rappresentare le configurazioni stesse. Un esem-

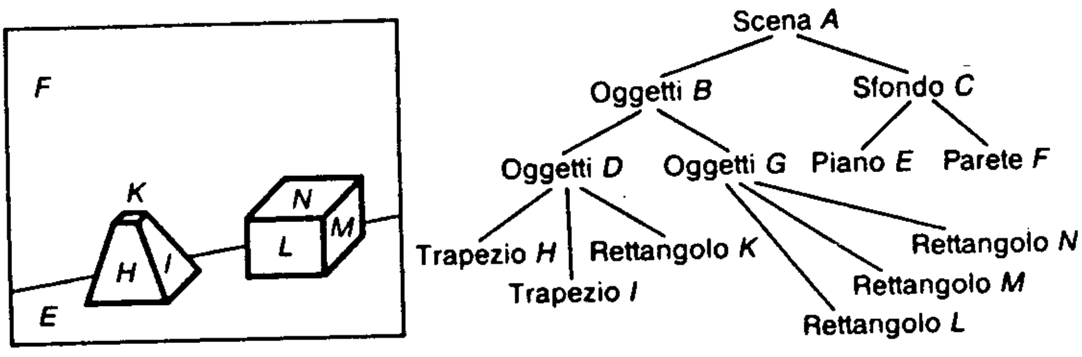



**Figura 10.2**
Esempio di descrizione strutturale con struttura ad albero di scomposizione in successive sottoconfigurazioni.

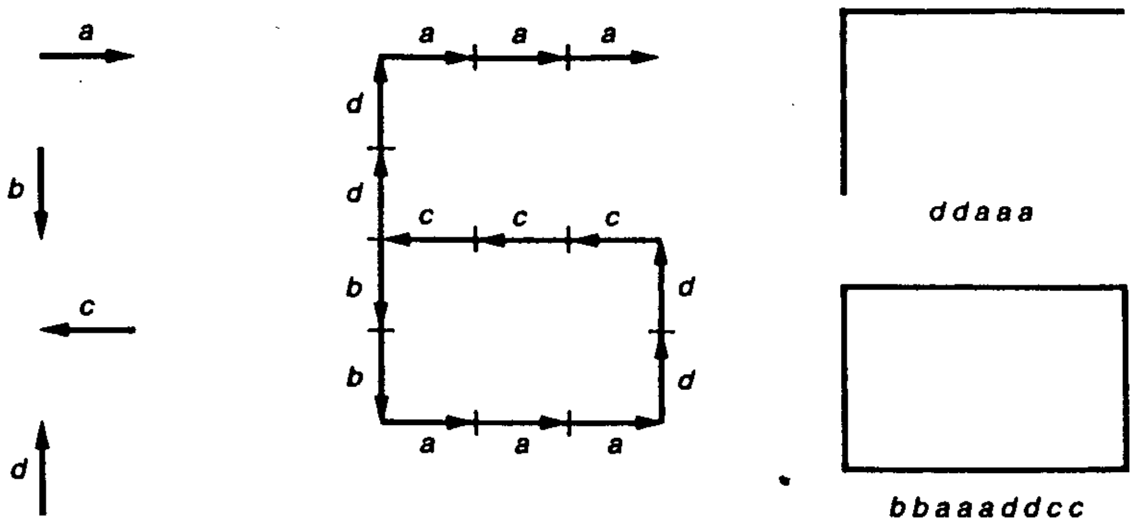



**Figura 10.3**
Esempio di descrizione strutturale del numero 6 con scomposizione in due sottoconfigurazioni e quindi nelle sottoconfigurazioni primitive (*a*, *b*, *c*, *d*) concatenate in apposite stringhe.

pio, per la descrizione strutturale dei numeri decimali, è mostrato nella figura 10.3.

Poiché nelle immagini le diverse configurazioni sono in genere rappresentate da determinate regioni dell'immagine, aventi diverse proprietà di interesse (oggetti con diversa forma, zone con diverso livello di grigio...), è assai importante poter descrivere

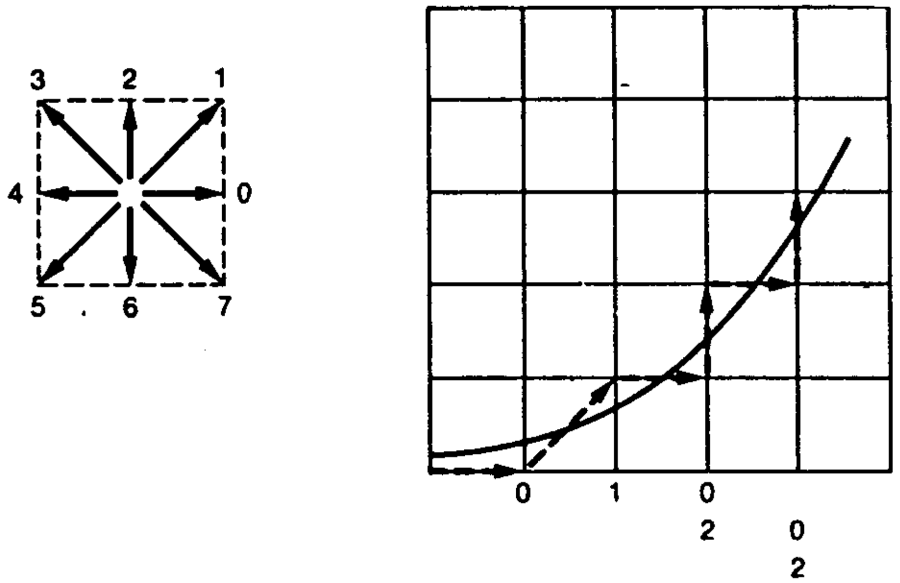



**Figura 10.4**
Codice di Freeman (*a sinistra*) e suo impiego nella descrizione di una curva di contorno come stringa di otto possibili sottoconfigurazioni primitive.

in modo efficiente la struttura delle configurazioni in esame mediante i loro contorni e bordi. A questo scopo sono state definite sottoconfigurazioni primitive o codici di contorno idonei: uno di questi, assai utile, è il cosiddetto codice di Freeman (Freeman, 1961), mostrato nella figura 10.4 con esempio di applicazione a un particolare contorno di una configurazione (si hanno otto sottoconfigurazioni primitive, in funzione delle quali viene descritta la struttura del contorno).

## 10.5 Alcune tecniche particolari di riconoscimento di configurazioni

Consideriamo nel seguito alcune tecniche particolari, abbastanza semplici, usate spesso in pratica (oltre ai metodi generali e di base sopra indicati e a tecniche specifiche come il codice di Freeman) per l'estrazione e il riconoscimento delle configurazioni più comuni presenti nelle immagini in esame.

### 10.5.1 Uso di soglie

Nel caso in cui le diverse configurazioni di interesse abbiano diverso livello di grigio, una tecnica assai semplice di separazione e riconoscimento delle configurazioni è rappresentata dall'uso di opportune soglie applicate ai livelli di grigio. Un semplice esempio può essere costituito dal riconoscimento, in una foto in bianco e nero da aereo di un territorio, della zona boschiva, in genere caratterizzata da elevati valori del livello di grigio (verso il nero) rispetto al contesto costituito da campi coltivati o praterie: in questo caso l'applicazione di una sola soglia, posta opportunamente ai valori intermedi della scala dei livelli di grigio, può estrarre facilmente le zone boschive e anche fornire, contando i punti i cui livelli superano la soglia, l'area totale delle zone stesse.

E' evidente che l'applicazione di un'espansione di scala (§ 6.3) può migliorare l'estrazione e il riconoscimento, in quanto viene a rendere più nette le separazioni fra gli intervalli del livello di grigio cui appartengono le varie configurazioni da riconoscere.

### 10.5.2 Analisi dell'istogramma dei livelli di grigio

E' stato già osservato (§ 6.5) che l'istogramma dei livelli di grigio (distribuzione di ampiezza dei livelli) costituisce un'utile indicazione globale dell'immagine in esame.

Tale istogramma può essere immediatamente utilizzato per problemi di riconoscimento di configurazioni, nel caso in cui le configurazioni stesse siano caratterizzate da livelli di grigio di valore diverso (in analogia a quanto osservato precedentemente per le soglie). Come esempio si può pensare, oltre al caso di fotografie in bianco e nero da aereo, al caso di pochi oggetti meccanici su un nastro trasportatore che abbiano intensità di grigio diverse (ad esempio, dadi più chiari e viti più scure): si avranno picchi diversi nell'istogramma per i vari oggetti.

### 10.5.3 Uso della trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier permette di avere una rappresentazione nel dominio delle frequenze spaziali dell'immagine in esame.

Si pensi, ad esempio, a un'immagine che abbia in alcune zone strutture o configurazioni localizzate costituite da variazioni rapide del livello di grigio nel senso orizzontale (come linee scure verticali): è evidente che anche la semplice trasformata di Fourier unidimensionale applicata in direzione orizzontale (frequenza spaziale $\omega_x/2\pi$) presenterà componenti in alta frequenza in corrispondenza di tali variazioni. Pertanto l'applicazione della trasformata 1D secondo $x$ a sottoimmagini permetterà di individuare in quali sottoimmagini si hanno le variazioni rapide cercate.

Analogamente per immagini con variazioni rapide spaziali dei livelli di grigio in determinate zone, l'applicazione della trasformata di Fourier 2D evidenzierà le alte frequenze spaziali delle zone di interesse, riconoscendole.[1]

Per alcuni oggetti tipici (griglie rettangolari, strutture circolari...) la forma dello spettro 2D è una caratteristica di riconoscimento nota a priori, che costituisce un utile riferimento (prototipo) di individuazione e riconoscimento (l'esempio può essere ancora una foto da aereo in bianco e nero in cui si vogliano distinguere le strutture urbane, caratterizzate da allineamenti a maglia rettangolare, dalle altre strutture quali coltivazioni o boschi: mentre lo spettro 2D della zona urbana ha valori significativi a due intervalli delle frequenze spaziali (su $\omega_x/2\pi$ e $\omega_y/2\pi$), lo spettro delle altre zone presenterà valori significativi a molte frequenze spaziali con dispersione dei valori stessi in modo più o meno regolare a simmetria circolare).

L'applicazione della trasformata di Fourier può essere utile anche a immagini opportunamente pre-elaborate. Se, ad esempio, sono stati estratti i contorni degli oggetti (§ 6.8), aventi forma geometrica diversa, l'applicazione della trasformata di Fourier 1D ai contorni permetterà di distinguere nettamente i contorni stessi (da circolari a rettangolari...).

### 10.5.4 Uso della funzione di autocorrelazione

Come già indicato nel capitolo 1 (§ 1.5), la funzione di autocorrelazione costituisce un metodo utile per estrarre informazioni sulla struttura dell'immagine, in particolare in presenza di disturbi e rumore. In particolare, dati i legami fra autocorrelazione e densità spettrale di potenza, si possono ottenere indicazioni su forme periodiche di variazione dei livelli di grigio, per identificare particolari configurazioni (Pratt, 1978).

[1] In particolare potranno essere anche evidenziate e riconosciute strutture più o meno regolarmente ripetute di variazione dei livelli di grigio (tessiture).

### 10.5.5 Uso del filtraggio numerico

Il filtraggio numerico è, come osservato più volte, di per sé utile per migliorare la qualità dell'immagine numerica, nella quale sono da riconoscere specifiche configurazioni di interesse (filtri inversi, filtri di ricostruzione ecc.; vedi cap. 9). Tecniche anche semplici di riconoscimento possono diventare praticamente utili dopo un opportuno filtraggio che estrae ed evidenzia le strutture di interesse. Di particolare rilievo possono essere tecniche di filtraggio numerico adattato, cioè aventi funzione di trasferimento (adattata alla particolare configurazione da estrarre) tale da rendere massimo il rapporto segnale/rumore, ovvero ottenere un'uscita con la massima riduzione del rumore (Pratt, 1978).

### 10.5.6 Uso di trasformazioni geometriche e tecniche di confronto

Il problema del riconoscimento di configurazioni richiede talvolta il confronto dell'immagine in esame (o parte di essa) con un'immagine o sottoimmagine di riferimento (prototipo). Questo può valere per il riconoscimento di semplici figure geometriche, ma soprattutto per il riconoscimento di configurazioni complesse (per le quali non si segua la via dell'analisi strutturale già indicata).

In questi casi occorre poter effettuare opportune trasformazioni geometriche, come variazioni di scala spaziale (§ 6.4), traslazioni, rotazioni, variazioni del punto di vista, per poter allineare l'immagine in esame con quella di riferimento a scala spaziale omogenea (vedi anche i capp. 15-18).

Il confronto delle due immagini può poi avvenire con semplici tecniche di analisi sequenziale o parallela dei pixel corrispondenti e criteri di decisione di uguaglianza o meno, oppure mediante correlazione fra le immagini stesse.

## 10.6 Considerazioni di confronto fra le varie tecniche

Come appare da quanto presentato nei paragrafi precedenti, il problema del riconoscimento è assai complesso e attualmente aperto a sviluppi teorici e applicativi.

Come indicazione generale fra le varie tecniche indicate, si può anzitutto osservare che, allo stato attuale, hanno avuto maggiore sviluppo e applicazioni pratiche le tecniche del tipo statistico (con prototipi), data la loro minore complessità relativamente alle tecniche di tipo sintattico (o strutturale).

In particolare le tecniche più semplici del paragrafo 10.5, anche se non permettono spesso di ottenere un riconoscimento ottimo o perfetto delle diverse configurazioni presenti nelle immagini dei vari settori applicativi (comunicazioni, telerilevamento, biomedica, robotica ecc.) possono rappresentare un primo approccio utile alla soluzione dei vari problemi. Alcune di queste tecniche (come il filtraggio numerico), e altre esaminate nei precedenti capitoli (come la compressione dei dati e l'estrazione

dal rumore), costituiscono comunque un'utilissima e spesso indispensabile pre-elaborazione, prima dell'applicazione di tecniche di riconoscimento più specifiche o più complesse.

## Riferimenti bibliografici

Freeman H., *On the Encoding of Arbitrary Geometric Configurations*, IRE Trans. Electronic Computers, vol. EC-10, 2, 260-68 (giugno 1961).
Fu K. S. (a cura di), *Digital Pattern Recognition* (Springer-Verlag, Berlino e New York 1976).
Gaglio S., Morasso P., Tagliasco V., *Syntactic Technique in Scene Analysis*, Digital Systems for Industrial Automation, vol. 1, N. 2 (1982).
Levialdi S., *Riconoscimento di forme: manuale, automatico o interattivo?*, in Cappellini V. e Rocca F. (a cura di), "Elaborazione Numerica delle Immagini" (Rapporto CNR, Firenze 1977).
Pratt W. K., *Digital Image Processing* (Wiley, New York 1978).

# Capitolo 11

# Sistemi di elaborazione numerica delle immagini

## 11.1 Introduzione

Nel capitolo 3 sono stati già presentati i metodi generali per la conversione delle immagini in forma numerica e per la ricostruzione delle immagini stesse in forma continua, partendo dalla loro rappresentazione campionata o numerica. In tale capitolo sono state anche illustrate le tecniche di base per la conversione in forma numerica e ricostruzione continua (vedi §§ 3.6 sg.).

In questo capitolo sono descritti i sistemi di elaborazione numerica delle immagini più comuni attualmente usati in pratica. Dopo alcune considerazioni generali vengono illustrate le diverse soluzioni, che fanno uso di calcolatori standard o minicalcolatori, di microprocessori o microcalcolatori e di circuiti digitali ad alta integrazione o di dispositivi speciali. Più in particolare sono presentati quattro sistemi di complessità crescente, attualmente usabili per l'elaborazione numerica delle immagini con diversi tipi di ricostruzione e presentazione delle immagini elaborate.

## 11.2 Struttura generale di un sistema di elaborazione numerica delle immagini

La struttura generale di un sistema di elaborazione numerica delle immagini è mostrata in figura 11.1. Come si vede, si hanno 5 parti o unità distinte, ciascuna riservata a una particolare operazione, indispensabile peraltro per definire un sistema di elaborazione di tipo completo.

La prima parte, unità d'ingresso, permette di acquisire immagini dal mondo esterno con i diversi dispositivi e apparati di acquisizione delle immagini di tipo opto-elettronico (vedi § 2.7): foto-rivelatori, apparati di scansione opto-meccanica, telecamere normali TV (in bianco e nero o a colori) e di tipo speciale, lettori per facsimile, sensori multispettrali, sensori termici, radiometri a microonde, radar, sonar, lidar. In definitiva questa unità d'ingresso effettua una conversione o trasduzione da informa-

zione ottica o elettromagnetica in analoga informazione elettrica (tensione o corrente).

La seconda parte, unità di conversione numerica e registrazione, ha anzitutto lo scopo fondamentale di effettuare il campionamento spaziale dell'immagine. Tale campionamento può essere effettuato contemporaneamente all'acquisizione dell'immagine (con un sistema di scansione ottica e fotorivelatore del tipo indicato in fig. 3.4), oppure successivamente all'acquisizione dell'immagine e alla sua conversione in forma elettrica, campionando nel tempo il segnale elettrico corrispondente al livello di grigio nei vari punti dell'immagine. In entrambi i casi occorre rispettare accuratamente i criteri del campionamento spaziale (§ 3.2), scegliendo un passo di campionamento $X$ opportunamente piccolo in accordo con il teorema del campionamento (relazioni [3.5]-[3.9]). Nel caso, ad esempio, di acquisizione con telecamera in bianco e nero, il segnale video corrispondente alla scansione elettronica (§ 2.7) avente frequenza massima (o banda $B$) espressa dalla relazione [2.13], pari a un valore da 3 a 6 MHz (a seconda delle particolari telecamere), dovrà essere campionato con una frequenza di campionamento almeno pari al doppio della frequenza massima (e quindi con 6 o $12 \cdot 10^6$ camp/s). I campioni vengono poi convertiti in forma numerica binaria mediante la quantizzazione e codifica binaria (§ 3.3) in accordo con la precisione richiesta (per precisione $>1\%$ occorrono ad esempio parole di 7 bit; per precisione $>4‰$ occorrono parole di 8 bit; per precisione $>1‰$ occorrono 10 bit e così via). La seconda unità contiene in genere anche un'adeguata memoria o apparato di registrazione numerica (ad esempio a nastro magnetico o a disco magnetico, *floppy-disk* ecc.) per poter conservare per gli intervalli di tempo richiesti la rappresentazione numerica dell'immagine acquisita. Nel caso che sia presente un apparato di registrazione numerica, esso di fatto costituisce anche un altro ingresso dall'esterno, in quanto immagini (in bianco e nero o a colori) già disponibili in forma numerica o convertite in tale forma da altre unità possono essere acquisite direttamente dal sistema considerato attraverso l'apparato di registrazione (da cui possono essere poi lette e trasferite verso l'elaboratore).

La terza parte, unità di elaborazione centrale, permette di effettuare le varie elaborazioni numeriche richieste (vedi capp. 4-10). Essa può in pratica essere costituita da un calcolatore standard di varia potenza, da un minicalcolatore, da un microprocessore o microcalcolatore, da circuiti digitali ad alta integrazione o da dispositivi speciali di elaborazione. In ogni caso tale unità deve essere in grado di effettuare le operazioni numeriche fondamentali (moltiplicazioni, somme ecc.) nelle quali possono essere scomposte le diverse elaborazioni numeriche richieste. Tale unità sarà anche dotata di un apposito apparato di controllo e di programmazione con il quale si possano programmare le diverse elaborazioni utili da effettuare e attuare i diversi controlli dei programmi e delle fasi di elaborazione. L'operatore del sistema può in genere intervenire su questa unità, che costituisce la parte di elaborazione vera e propria, mediante un'apposita tastiera o telescrivente (che ha in genere anche funzioni di stampante normale). L'operatore può in genere anche effettuare, in questo modo, controlli sulle altre unità del sistema (in particolare sulle unità d'ingresso, di conversione e di

presentazione e registrazione), predisponendone le caratteristiche e modalità di operazione, al fine di ottenere sia una migliore organizzazione e configurazione dell'intero sistema sia un aumento dell'efficienza globale.

La quarta parte, unità di conversione numerico-analogica (CNA), permette di riconvertire i dati numerici di uscita dall'elaboratore (che rappresentano i valori dei pixel dell'immagine elaborata di uscita) di nuovo in forma analogica (campioni spaziali o forma continua) per poter osservare e registrare le immagini elaborate. Tale unità comprende pertanto un apparato di ricostruzione del tipo indicato nella figura 3.8 (vedi § 3.7), che permette di convertire le parole numeriche che rappresentano l'immagine elaborata in intensità luminosa proporzionale al valore numerico su una griglia spaziale a maglia quadrata, utilizzando anche, per una migliore ricostruzione, funzioni di interpolazione 1D o 2D, che approssimano in modo più o meno stretto quella ideale (vedi § 3.5 e relazione [3.26]).

La quinta parte, unità di uscita, permette di presentare in forma visiva i risultati dell'elaborazione forniti dall'unità di conversione CNA su vari apparati: stampanti veloci con caratteri sovrapposti (capaci di mostrare fino a ~ 16 livelli di grigio) o con punti elementari più o meno fitti (anche con colori diversi), schermo o *display* in bianco e nero o a colori (in genere utilizzando i tre colori R, V, B), *display* alfa-numerico per caratteri e curve, registratore grafico o *plotter* con unica traccia in bianco e nero o con più tracce a colori.... I dati di uscita possono anche, per successive elaborazioni o utilizzazioni, essere memorizzati in modo permanente su registratori a nastro magnetico o a dischi (in particolare *floppy-disk*), che in genere coincidono con i registratori indicati nella seconda unità (di conversione) (fig. 11.1).

Come già osservato, le cinque unità precedenti sono interconnesse nel modo più efficiente, al fine di effettuare determinate operazioni con gli stessi apparati (ove possibile) predisposti di volta in volta allo scopo specifico: in genere l'operatore addetto al sistema effettua ciò tramite i comandi e le istruzioni che impartisce mediante tastiera o telescrivente all'unità di elaborazione centrale. In particolare nell'unità di elaborazione centrale vengono predisposti (o "caricati") i programmi di acquisizione delle immagini, di elaborazione (ad esempio esaltazione dei contrasti, filtraggio numerico, riduzione dei dati, riconoscimento di configurazioni ecc.), di presentazione delle immagini elaborate (tali programmi sono inseriti nelle memorie dell'unità di elaborazione). L'elaboratore centrale è anche in genere predisposto a operare con un certo linguaggio, nel quale sono scritte le istruzioni di comando e i programmi precedenti di acquisizione, elaborazione e presentazione (vedi cap. 12).

Nei paragrafi seguenti esaminiamo più in dettaglio 5 soluzioni per l'unità di elaborazione centrale o elaboratore centrale: calcolatori standard; minicalcolatori; microcalcolatori o microprocessori; elaboratori speciali (*array processors*); circuiti ad alta integrazione o di tipo speciale.

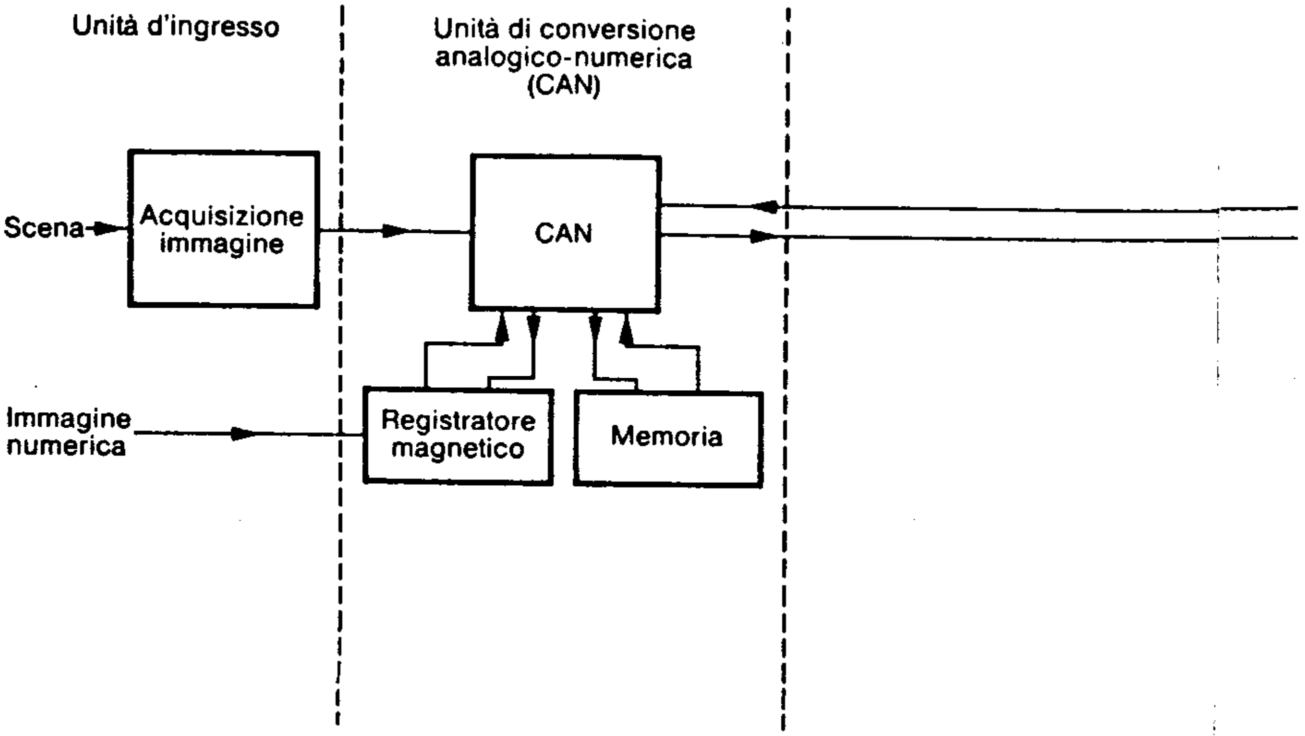



**Figura 11.1**
Struttura generale di un sistema di elaborazione numerica delle immagini, comprendente 5 unità principali: unità d'ingresso, unità di conversione CAN, unità di elaborazione, unità di conversione CNA, unità di uscita.

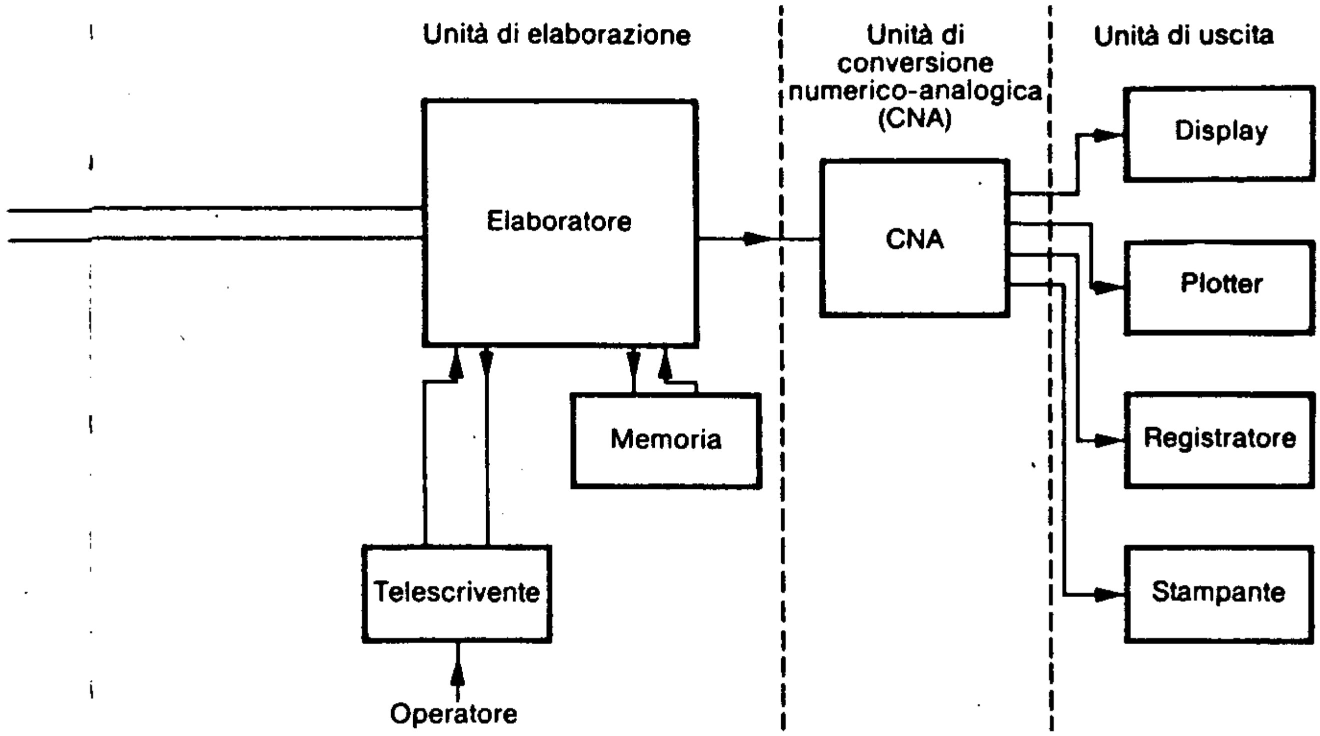
## 11.3 Uso di calcolatori standard

Un calcolatore numerico standard, cioè utilizzabile per molteplici elaborazioni e applicazioni (non solo elaborazione numerica delle immagini), pur nella grande varietà di configurazioni e complessità, è schematizzabile in poche parti o unità principali (fig. 11.2):

– *unità di calcolo centrale* (*central processing unit*, CPU), che costituisce il nucleo di elaborazione vero e proprio del calcolatore, comprendente i circuiti veloci per l'effettuazione delle operazioni elementari (somma, moltiplicazione);

– *unità di memoria*, suddivisa in genere in diverse sezioni riservate a conservare le istruzioni di base ("sistema operativo") che permettono di utilizzare il calcolatore e le sue apparecchiature periferiche con un certo linguaggio, a memorizzare i programmi di elaborazione (delle immagini) introdotti dall'operatore, a mantenere per i tempi necessari o programmati i dati parziali o finali elaborati (per queste ultime memorie, si parla anche di "memorie dinamiche");

– *unità di ingresso-uscita* (I/O), che permette attraverso appositi circuiti di interfaccia e memorie intermedie (o *buffer*) di ricevere le istruzioni dall'operatore (tramite tastiera o telescrivente), i dati di ingresso effettivi (ad esempio, le parole numeriche che rappresentano i campioni dell'immagine da elaborare) e di fornire in uscita (su




stampante o video grafico) le istruzioni e programmi che sono contenuti nelle memorie interne o i dati elaborati (ad esempio, le parole numeriche che rappresentano i campioni dell'immagine elaborata).

– *unità di controllo*, che fornisce all'elaboratore i segnali di funzionamento interno (segnali di "orologio" o di sincronismo) a partire dall'intervallo elementare di scrittura e lettura di un singolo bit (ciclo macchina) e gli opportuni segnali di controllo per le varie parti, per assicurare il corretto funzionamento dell'intero elaboratore.

I calcolatori standard si sono notevolmente evoluti negli ultimi anni, per quanto riguarda le prestazioni di funzionamento: alte velocità (ciclo macchina fino a poche

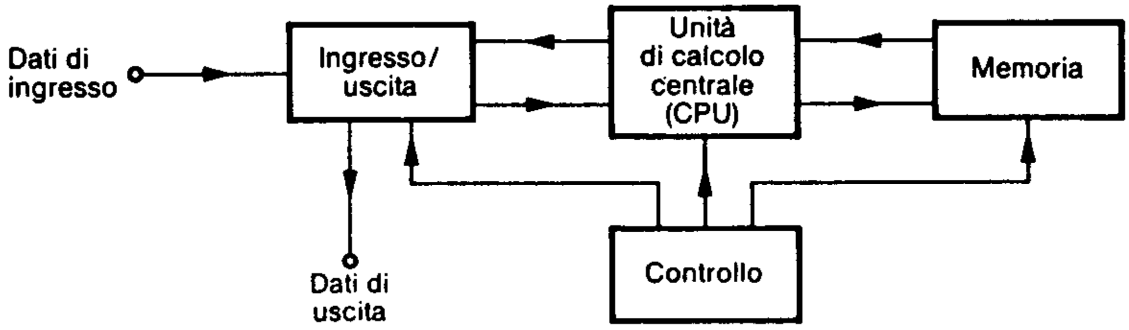



**Figura 11.2**
Schema a blocchi di un calcolatore standard, comprendente l'unità di ingresso-uscita (I/O), l'unità centrale di elaborazione (CPU), l'unità di memoria e l'unità di controllo.

decine di nanosecondi); elevata precisione (parole da 32 o 64 bit); grandi capacità di memoria (decine e centinaia di megabyte); utilizzazione da parte di più utenti.

## 11.4 Uso di minicalcolatori

I minicalcolatori sono di struttura analoga a quella dei calcolatori standard (fig. 11.2), ma con prestazioni più limitate (ad esempio: ciclo macchina di centinaia di nanosecondi, precisione definita da 16 o 32 bit, memoria di capacità da frazioni di megabyte ad alcuni megabyte...).

I minicalcolatori si sono ampiamente affermati come unità di elaborazione locale, cioè da installare direttamente nelle varie sedi di impiego (laboratori, industrie, uffici...), mentre i calcolatori di grandi dimensioni sopra indicati si sono sempre più configurati come veri e propri centri di calcolo, utilizzati da più utenti. Ciò si è particolarmente verificato nel caso dell'elaborazione numerica delle immagini: qui il minicalcolatore (terza unità nella struttura generale di fig. 11.1) fa parte integrante del sistema globale di elaborazione delle immagini, essendo spesso dedicato interamente a tale elaborazione. Per alcune applicazioni possono essere collegati fra loro minicalcolatori di sistemi diversi di elaborazione numerica delle immagini attraverso linee di collegamento (*bus*) ad alta velocità ($5 \div 50$ Mbit/s) per due scopi principali:

– effettuare uno scambio di dati elaborati separatamente dai diversi sistemi (su diverse immagini, mappe ecc.);

– effettuare elaborazione in parallelo sulle stesse immagini o mappe per aumentare la capacità di calcolo (soprattutto la velocità), effettuando anche elaborazioni diverse in parallelo (ad esempio, con un sistema calcolo della trasformata di Fourier 2D, con un altro filtraggio numerico 2D per migliorare la qualità dell'immagine).

## 11.5 Uso di microcalcolatori o microprocessori

La struttura di base di un microcalcolatore o microprocessore, realizzato su un'unica cartolina o più comunemente in unico circuito integrato (*chip*), è mostrata in figura 11.3, con le diverse parti principali, corrispondenti in modo più o meno immediato a quelle indicate in generale per un calcolatore standard:

– *unità aritmetica e logica* (*arithmetic and logic unit*, ALU) per effettuare le operazioni logiche e aritmetiche;

– *accumulatore* (*accumulator*, A), per accumulare i risultati parziali forniti dalla ALU;

– *registri di istruzione* (*instruction register*, IR) per inserire le istruzioni necessarie al particolare impiego del microprocessore e contatore di programma (*program counter*, PC) per contare e predisporre le varie istruzioni inserite nel IR, ricevute attraverso registri intermedi (*temporary register*, TR).

Il funzionamento del microprocessore può essere controllato e definito attraverso un apposito microprogramma, costituito da microistruzioni elementari (parole di un certo numero di bit) sopra indicate, che comanda le varie parti funzionali del microprocessore (sono in genere usati linguaggi di microprogrammazione).

In genere il microprocessore si avvale di una o più memorie esterne (ciascuna su singolo chip o integrate insieme in unico chip) del tipo seguente:

– *memoria a sola lettura* (*read only memory*, ROM), nella quale vengono scritte, nel momento della costruzione, determinate informazioni fisse (ad esempio tabelle di numeri, quali coefficienti fissi di filtraggio numerico; vedi cap. 7);

– *memorie programmabili a sola lettura* (*programmable read only memory*, PROM), analoghe alle precedenti, con una maggiore possibilità di definire e scrivere il contenuto da parte dell'utente nel sistema in cui vengono inserite;

– *memorie a sola lettura programmabili e cancellabili* (*erasable programmable read only memory*, EPROM), che possono essere riscritte più volte da parte dell'utente (in genere la cancellazione avviene inviando un fascio di radiazione ultravioletta attraverso un'apposita fessura presente nel contenitore) in modo da variarne il contenuto per le varie applicazioni (ad esempio scrivere successivamente coefficienti diversi di filtraggio o maschere diverse per l'estrazione dei contorni; vedi cap. 6).

L'aspetto interessante del microprocessore sono le sue dimensioni estremamente ridotte (tipicamente un unico chip) e il costo moderato. Anche aggiungendo esternamente memorie del tipo sopra indicato (in singoli chip), le dimensioni globali dell'unità di elaborazione restano estremamente limitate e di costo contenuto.

Le prestazioni sono in genere più limitate rispetto ai calcolatori e minicalcolatori

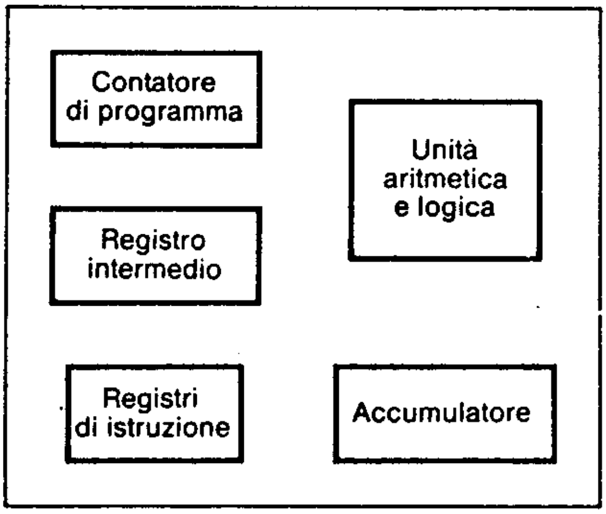



**Figura 11.3**
Struttura di base di un microcalcolatore o microprocessore, comprendente i registri di istruzione (IR), i registri intermedi (TR), il contatore di programma (PC), l'unità aritmetica e logica (ALU) e l'accumulatore (A).

(cicli macchina di frazioni di microsecondo, precisione definita da 8 a 16 bit) e le memorie aggiuntive ROM, PROM, EPROM hanno capacità limitate (8 ÷ 128 kbyte), comunque sufficienti per effettuare alcune elaborazioni più semplici su immagini numeriche di moderate dimensioni (64 · 64, 128 · 128). L'evoluzione tecnologica (in particolare dei dispositivi ad altissima integrazione VLSI) è comunque molto rapida e già si delineano sul mercato microprocessori a 32 bit dotati sia di un'unità aritmetica (vera e propria CPU) sia di adeguata capacità di memoria (anche molti megabyte) (*Special Report*, 1983).

## 11.6 Uso di elaboratori speciali

Negli ultimi anni, per la soluzione più efficiente di problemi di elaborazione complessi nei quali determinate operazioni aritmetiche devono essere effettuate successivamente per molte, moltissime volte su grandi quantità di dati, sono state sviluppate unità di elaborazione speciale. In effetti molte unità di questo tipo (elaboratori speciali) sono state realizzate per effettuare determinate elaborazioni numeriche sulle immagini (in diversi settori operativi, quali le comunicazioni, la biomedicina, il telerilevamento, ricerche sismiche, ricerche petrolifere ecc.) quali: trasformazioni 2D (Fourier, Hadamard-Walsh ecc.), convoluzioni 2D, filtraggio numerico 2D, compressione dei dati, riconoscimento di forme...

Di particolare interesse sono i cosiddetti elaboratori ad "array" (*array processors*), utili appunto per effettuare elaborazioni veloci 2D sulle immagini. Queste unità veloci ad array possono essere viste come periferiche speciali di un sistema di elaborazione del tipo già indicato (calcolatore standard o minicalcolatore) in accordo con lo schema di principio di figura 11.2. In sostanza l'unità ad array esegue ad altissima velocità (da 5 a 20 milioni di operazioni in virgola mobile per secondo) le operazioni aritmetiche ripetitive già indicate, mentre il calcolatore normale ospite (*host computer*) ha un ruolo di supervisore, con scambio dei dati utili (risultati parziali o totali, ad esempio). Questo scambio di dati è in molti casi di notevole importanza, specialmente quando deve avvenire ad alta velocità: sono per questo usate apposite linee di scambio dei dati (*bus lines*), che servono sia al collegamento con il calcolatore ospite, sia allo scambio interno fra unità aritmetica centrale dell'unità ad array, le sue memorie e le unità di ingresso-uscita (I/O) che ricevono in particolare i dati delle immagini da elaborare e forniscono i dati delle immagini elaborate.

L'utilità dell'uso di un'unità ad array è essenzialmente legata alla possibilità di estendere le capacità di elaborazione (in particolare aumentando notevolmente la velocità) di un dato calcolatore o minicalcolatore, senza doverlo sostituire con uno molto più grande e costoso.

## 11.7 Uso di circuiti ad alta integrazione o di tipo speciale

In alcune applicazioni di elaborazione numerica delle immagini, può risultare conveniente o necessario (dati i particolari requisiti dell'elaborazione da effettuare) realizzare un'unità di elaborazione apposita o ad hoc, non disponibile già in forma più o meno standard. Si verifica questa situazione, ad esempio, quando si abbia da effettuare solo una specifica elaborazione numerica sui dati dell'immagine numerica, quale filtraggio numerico (1D o 2D), riduzione dei dati (1D o 2D), riconoscimento di determinate configurazioni... In questo caso la soluzione circuitale o speciale ad hoc può risultare utile per due motivi principali: 1) effettuare l'elaborazione specifica alla massima velocità (o, come si dice, in tempo reale, cioè senza interrompere il processo, al massimo con un modesto ritardo temporale costante); 2) ridurre notevolmente i costi, in quanto non viene impiegata un'unità di elaborazione più generale di maggiore complessità.

In effetti l'unità ad array già descritta costituisce un primo esempio di realizzazione di questo tipo, ancora però in una forma strutturale abbastanza standard e definita una volta per tutte.

Le realizzazioni particolari ad hoc o, come spesso si dice, "in hardware" possono essere molteplici, utilizzando i vari dispositivi a semiconduttori attualmente presenti sul mercato. Si possono comunque distinguere due tipi principali: realizzazioni che usano circuiti integrati digitali ad alta integrazione; realizzazioni che usano dispositivi speciali.

Nelle realizzazioni del primo tipo si usano circuiti digitali ad alta integrazione (LSI) o ad altissima integrazione (VLSI) per effettuare le operazioni aritmetiche necessarie, cioè somme e moltiplicazioni (Cappellini, Constantinides, Emiliani, 1978). Per quanto riguarda i sommatori, si possono realizzare sommatori paralleli a 16 bit usando le più comuni famiglie di circuiti TTL (*transistor-transistor logic*) con tempi di addizione inferiori a 50 ns, usando circuiti TTL del tipo Schottky con tempi inferiori a 10 ns e infine usando circuiti ECL (*emitter-coupled logic*) con tempi di pochi nanosecondi. Per quanto riguarda i moltiplicatori (attuabili con diversi metodi, quali quello con somme successive, con complemento a 2 ecc.) si hanno moltiplicatori serie-parallelo di $8 \cdot n$ bit con circuiti TTL del tipo Schottky (operanti con tempi di circa 400 ns con moltiplicatori $8 \cdot 8$), moltiplicatori su singolo chip con circuiti VLSI operanti con tempi di circa 100 ns ($8 \cdot 8$ bit) e 130 ns ($16 \cdot 16$ bit). Per quanto riguarda le unità di memoria, si sono già indicate le memorie (anche su singolo chip) del tipo ROM, PROM e EPROM; si hanno anche memorie su singolo chip con circuiti TTL, con capacità di alcune migliaia di bit operanti con cicli elementari di decine di nanosecondi e con circuiti ECL con capacità di centinaia o poche migliaia di bit operanti con cicli elementari di pochi nanosecondi.

Fra le realizzazioni che usano dispositivi speciali, sono di notevole interesse quelle che utilizzano circuiti del tipo CCD (*charge-coupled-devices*, dispositivi ad accoppia-

mento di carica). Questi circuiti, in effetti, elaborano segnali o valori campionati, essendo concettualmente simili a registri a spostamento di tipo analogico o continuo, ove pacchetti di carica (proporzionali ai valori dei campioni) sono spostati attraverso la struttura CCD. Si può effettuare moltiplicazione dei valori campionati che transitano nel registro a spostamento attraverso una particolare sagomatura degli elettrodi, oppure con moltiplicatori esterni analogici. Poiché i circuiti CCD sono realizzati mediante la stessa tecnologia a semiconduttore dei circuiti ad alta integrazione, sommatori e moltiplicatori possono essere costruiti sullo stesso substrato del CCD. Si possono così ottenere in particolare filtri a dati campionati (1D e potenzialmente 2D), correlatori e analizzatori di spettro anche su un singolo chip.

## 11.8 Alcuni sistemi di elaborazione numerica delle immagini

In accordo con i criteri generali di realizzazione dei sistemi di elaborazione numerica delle immagini, indicati nei precedenti paragrafi, sono di seguito presentati quattro sistemi di elaborazione, di complessità crescente (con unità di elaborazione dai microprocessori fino ai grandi calcolatori).

### 11.8.1 Sistema S-1 di elaborazione numerica delle immagini con microprocessore

La struttura del sistema S-1 con microprocessore Z 80 è mostrata in figura 11.4, mentre la tavola 11 mostra in alto una foto del sistema stesso. Il sistema comprende le

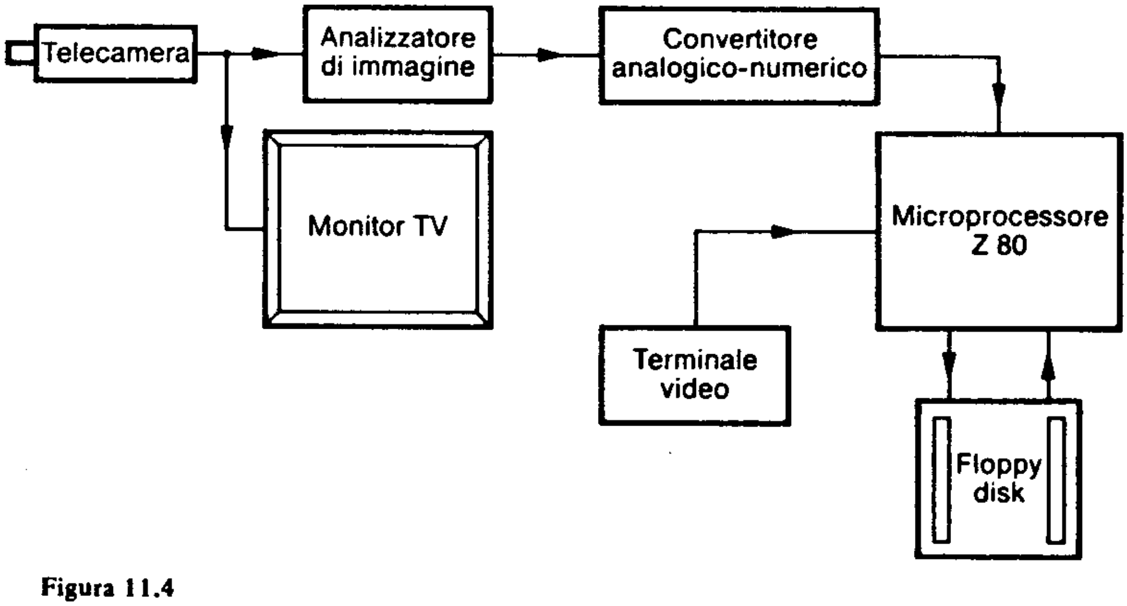



**Figura 11.4**
Sistema S-1 di elaborazione numerica delle immagini: lo schema a blocchi del sistema comprende la telecamera Philips, l'analizzatore di immagine CV1321, il convertitore analogico-numerico (CAN), il microprocessore Z80, due floppy disk da 308 kbyte ciascuno, il terminale video della TESAK e il monitor TV.

seguenti unità:

– telecamera Philips in bianco e nero;
– analizzatore di immagine TV CVI 321 della Colorado Video Inc. in grado di selezionare, da ogni quadro o *frame* televisivo, una singola colonna e quindi capace di ridurre la frequenza del segnale video di un fattore pari a 625 (in pratica, per un'immagine statica, la sua rappresentazione completa viene ottenuta con 625 quadri successivi);
– convertitore analogico-numerico a 8 bit per il campionamento e conversione in forma numerica (parole di 8 bit) del segnale video rallentato fornito dal CVI 321;
– microprocessore Zilog Z 80 (ciclo macchina 0,4 $\mu$s, tempo istruzione 1,6 $\mu$s, somma 1,6 $\mu$s e memoria 16 kbyte) con due *floppy disks* di memoria (ogni *floppy disk* con capacità di memoria pari a 308 kbyte);
– terminale video della TESAK di Firenze o telescrivente;
– monitor TV per la visualizzazione dell'immagine continua ripresa dalla telecamera.

Il sistema è di piccola complessità e prestazioni limitate, in particolare per la limitazione di calcolo imposta dal microprocessore di tipo standard e dalle sue memorie a dischetti. Esso è comunque in grado di effettuare conversioni in forma numerica di immagini esterne riprese dalla telecamera (fotografie, scene fisse reali, immagini lentamente variabili) e di elaborare le immagini numeriche così ottenute (di solito 64 · 64 o 128 · 128) con semplici algoritmi del tipo applicazione di soglie, espansioni di scala dei grigi, filtraggi passa-basso o passa-alto con operatori locali, estrazione dei contorni con operatori 2 · 2 o 3 · 3 (vedi cap. 6). Un esempio di elaborazione numerica (estrazione dei contorni) con tale sistema è stato già mostrato nella tavola 7 A, B.

L'interesse di questo semplice sistema (e di altri simili e più o meno potenti ottenibili con altri microprocessori più complessi e con maggiore memoria esterna) è legato al suo limitato costo e alle dimensioni limitate. Il sistema è in effetti facilmente trasportabile e può essere particolarmente utile per riprese dirette, acquisizioni in forma numerica delle scene osservate anche all'esterno, ove è effettivamente richiesta l'acquisizione dell'immagine di interesse. Esso può inoltre effettuare semplici elaborazioni (come estrazione dei contorni con operatore 3 · 3) (Cappellini, Odorico, 1981).

### 11.8.2 Sistema S-2 di elaborazione numerica delle immagini con minicalcolatore

La struttura del sistema S-2 con minicalcolatore PDP 11-34 è mostrata nella figura 11.5, mentre la tavola 11 mostra in basso la foto del sistema stesso.

Il sistema comprende le seguenti unità:

– telecamera INELCO con vari obiettivi (per riprese da piccola, media e grande distanza) in bianco e nero;
– unità di acquisizione, campionamento e conversione in forma numerica delle

immagini VDC 501 della TESAK di Firenze, con capacità di conversione fino a ~15 Mcamp/s e comprendente 12 piani di memoria (256·256) con 1 bit ciascuno;

– monitor a colori (con i tre colori primari R, V, B) INELCO, sul quale possono essere mostrate le immagini continue acquisite (sia in bianco e nero, sia a colori con opportune scale cromatiche);

– minicalcolatore PDP 11-34 della Digital Equipment con 256 kbyte di memoria interna;

– due dischi da 5 Mbyte ciascuno;

– telescrivente;

– registratore a nastro magnetico di tipo digitale della Digital Equipment con possibilità di accettare nastri magnetici da 800 o 1600 bit/pollice.

Il sistema è di media complessità, dotato di tutte le unità necessarie per l'acquisizione, la conversione in forma numerica e l'elaborazione delle immagini e infine la loro presentazione in bianco e nero e a colori (sia nella forma continua sia nella forma ricostruita da quella numerica). Il sistema è in grado di acquisire e di elaborare immagini 256·256 (e con apposita unità) 512·512 o con opportune limitazioni 1024·1024. Tutti gli algoritmi di elaborazione descritti nei precedenti capitoli possono essere realmente applicati nella elaborazione delle immagini, a parte i tempi di calcolo e presentazione dei risultati. Esempi di acquisizione ed elaborazione con questo sistema sono stati già mostrati nei precedenti capitoli (tavv. 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10) e molti altri saranno riportati nei prossimi capitoli.

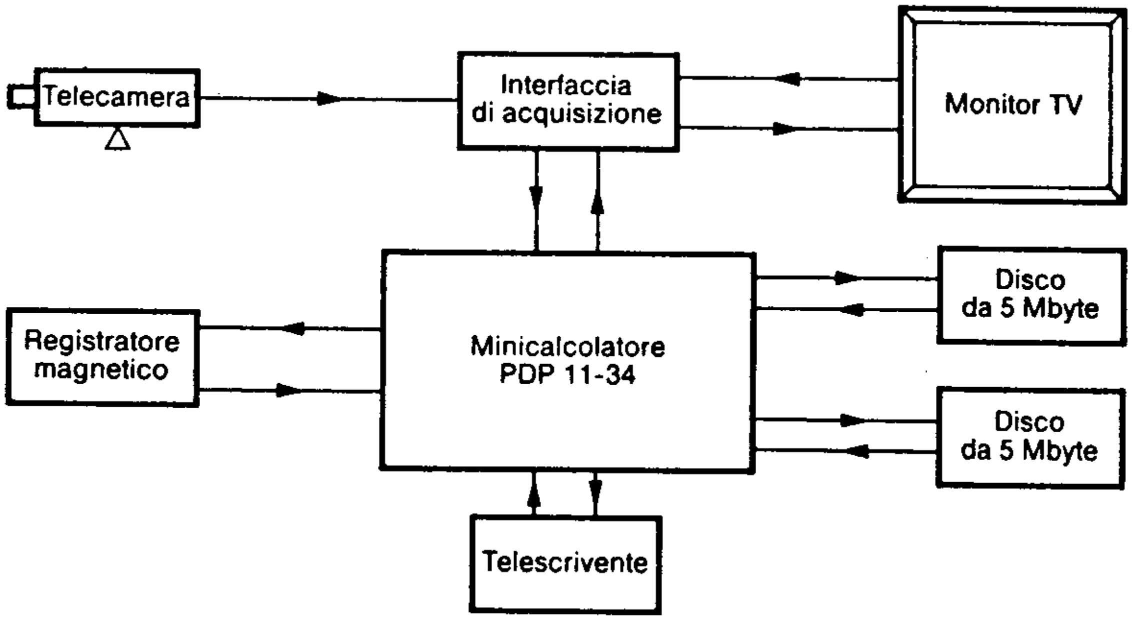



**Figura 11.5**
Sistema S-2 di elaborazione numerica delle immagini: lo schema a blocchi del sistema comprende la telecamera INELCO, l'unità di acquisizione, campionamento e conversione in forma numerica (interfaccia) TESAK VDC 501, il monitor a colori (display), il minicalcolatore PDP 11-34, due dischi da 5 Mbyte ciascuno, la telescrivente e un registratore a nastro magnetico digitale.

Il sistema può essere impiegato nell'elaborazione numerica delle immagini dei diversi settori applicativi (comunicazioni, telerilevamento, biomedicina ecc.) e nella configurazione attuale o più o meno potenziata (con altri minicalcolatori, unità di prestazioni più elevate e memorie di maggiore capacità) costituisce una soluzione conveniente per laboratori di ricerca o enti operativi in cui si debbano effettuare elaborazioni di immagini.

### 11.8.3 Sistema S-3 di elaborazione numerica delle immagini con minicalcolatore e array processor

La struttura del sistema S-3 con unità di elaborazione SEL 32/27 e *array processor* MAP 300 della CSPI è mostrata in figura 11.6.

Il sistema comprende le seguenti unità:

– unità di elaborazione SEL 32/27 veloce a 32 bit con *bus-line* a 26,67 Mbyte/s;

– memorie IMM (2 unità) da 256 kbyte (con ciclo di lettura-scrittura di 300 ns);

– *array processor* MAP 300 (moltiplicazione 32 · 32 in 420 ns, somma-sottrazione in 210 ns in virgola mobile) con apposite memorie di interfaccia (RMI, SMI);

– linea di collegamento (*bus*) veloce fra unità di elaborazione SEL 32/27, *array processor* e unità periferiche (fra cui il registratore magnetico);

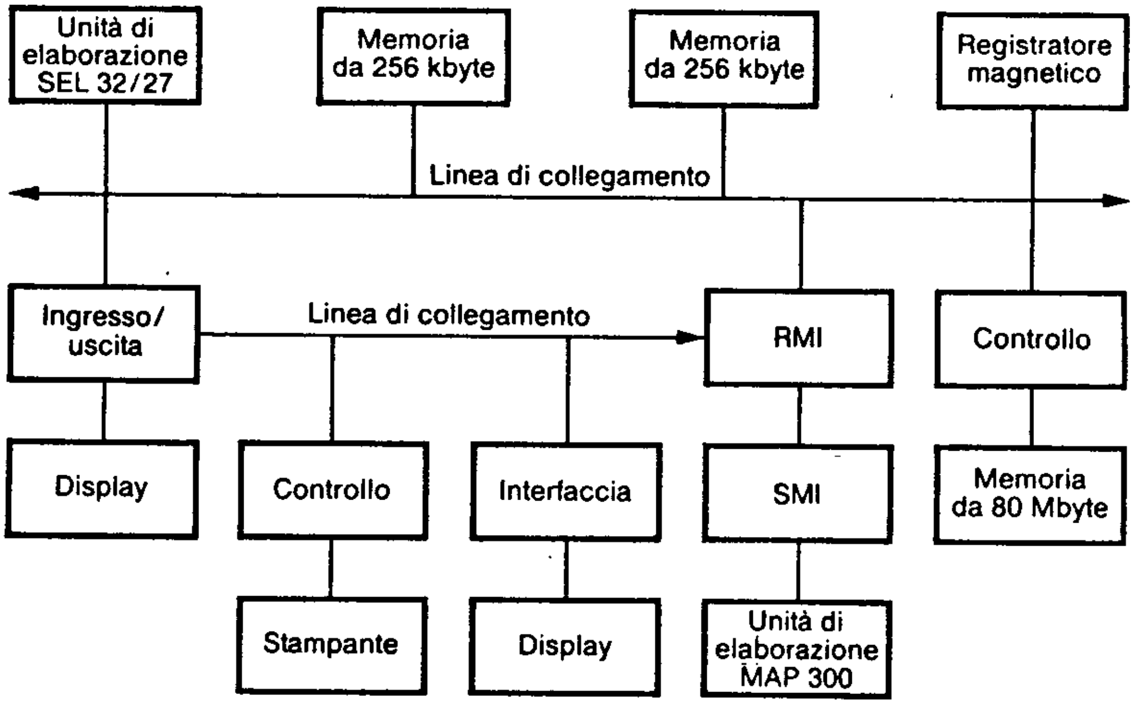



**Figura 11.6**
Sistema S-3 di elaborazione numerica delle immagini, comprendente l'unità di elaborazione SEL 32/27, due memorie (IMM) da 256 kbyte, registratore a nastro magnetico, unità di ingresso-uscita (IOP), display, stampante, memorie di interfaccia (RMI e SMI), *array processor* MAP 300 e memoria da 80 Mbyte.

– memoria a disco da 80 Mbyte con relativo controllo;
– alcuni display per la visualizzazione delle immagini elaborate comandati attraverso apposite interfacce e unità di ingresso-uscita (IOP) e stampante.

Le immagini numeriche possono essere inserite o nel registratore a nastro magnetico digitale o nell'unità a disco.

Il sistema è di media complessità, ma con l'*array processor* particolarmente indicato a effettuare elaborazioni anche complesse in tempi limitati sulle immagini acquisite.

L'architettura globale del sistema è in effetti assai efficiente, sia per la possibilità di elaborazione veloce (nel SEL 32/27 e specialmente nel MAP 300) sia per le linee di scambio dati, pure ad alta velocità. Essa pertanto è utile per effettuare operazioni 2D e anche 3D di convoluzione, filtraggio, ricostruzione, riconoscimento ecc.

### 11.8.4 Sistema S-4 di elaborazione numerica delle immagini IBM 7350

Alla classe dei sistemi di elaborazione delle immagini medio-alti appartiene il sistema IBM 7350, progettato e realizzato dalla IBM Italia.

Il sistema IBM 7350 funziona collegato direttamente al canale di un sistema IBM di adeguata potenza (ad esempio IBM 4381). Ciò rende possibile un'elevata integrazione delle risorse del sistema stesso (in particolare i dischi) con le capacità funzionali dell'IBM 7350.

Altre caratteristiche salienti del sistema sono:

– l'elevata risoluzione del monitor a colori, sul quale è visualizzato circa un milione di punti (per la precisione 1024 · 1024 punti o pixel);
– la disponibilità, in aggiunta al monitor a colori, di un display alfanumerico con tastiera per colloquio dell'utente con il sistema principale;
– una notevole capacità elaborativa e di memoria (fino a quasi 8 Mbyte) locali.

Il sistema si presenta come un tavolo di lavoro con i due video collegati a un'unità di controllo (tav. 12), a sua volta collegata al sistema principale. L'architettura interna del sistema è schematizzata nella figura 11.7. Il contenuto del *refresh buffer* (RB) è visualizzato sul monitor a colori mediante la tabella di decodifica del colore (PCLUT). Operazioni quali ingrandimento e scorrimento dell'immagine, spostamento del "cursore" ecc. sono disponibili e immediate.

Altre copie dell'immagine (o altre immagini) possono essere memorizzate sui *band buffer* (BB1, BB2,... BB8) ed elaborate localmente mediante un'unità logico-aritmetica (IPALU). Durante tali elaborazioni, alcuni BB vengono usati come sorgenti di dati, altri come aree di lavoro o memorie per i risultati finali. Ad esempio, possono essere sommate le immagini poste in BB1 e BB2 e il risultato posto in BB3. Tali elaborazioni possono essere estese o a tutta l'immagine o ad un sottoinsieme rettangolare o ad un sottoinsieme indicato mediante una "maschera" (MB). Alcune funzioni specializzate possono essere, infine, compiute da moduli logici appositamente costruiti.

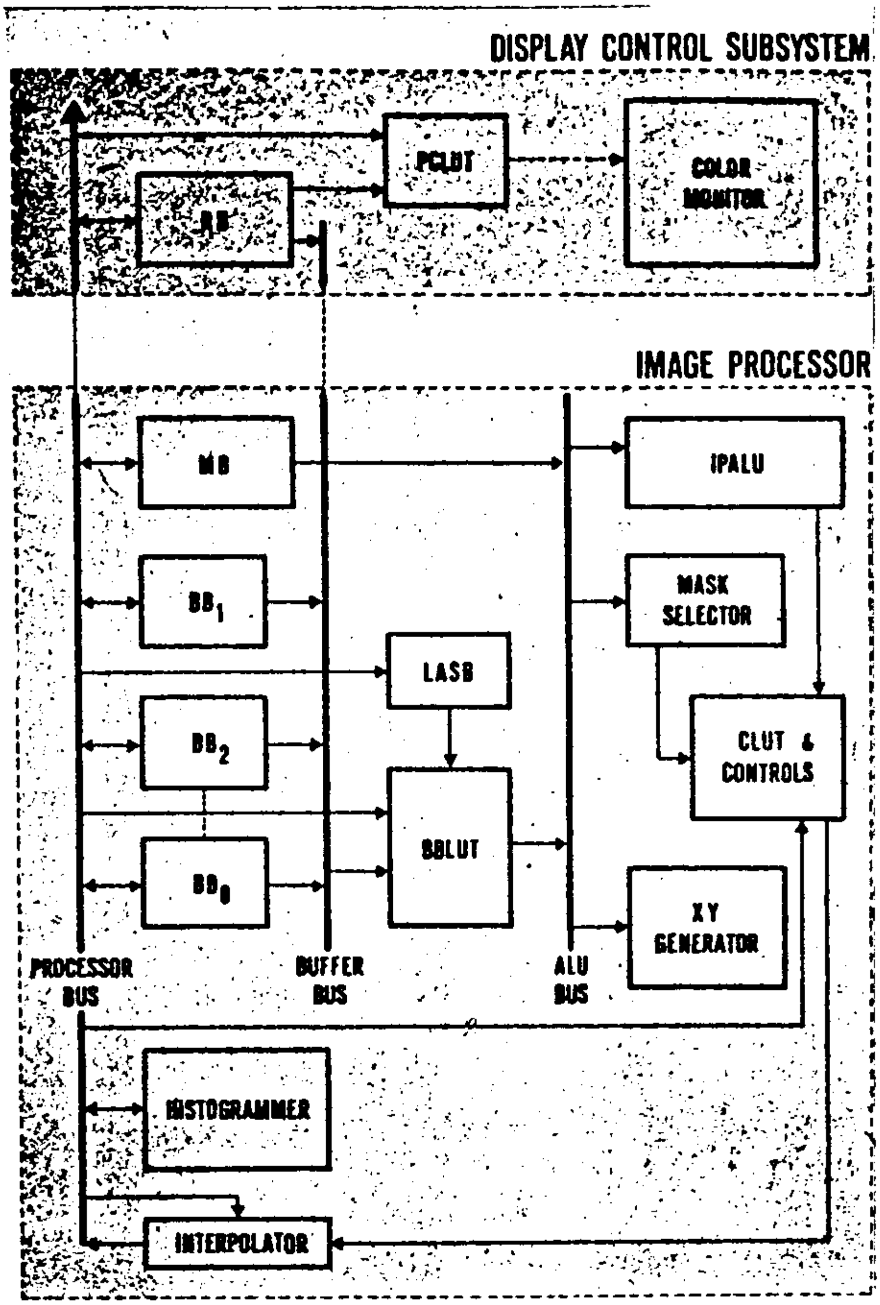



Figura 11.7
Architettura del sistema IBM 7350. I dati delle immagini vengono caricati mediante il *pro cessor bus* nel *refresh buffer* (RB) e visualizzati sul monitor a colori. Alternativamente possono essere caricati in uno dei *band buffer* (BB) ed elaborati mediante l'unità logico-aritmetica (IPALU).

Ad esempio: è possibile calcolare l'istogramma di un'immagine, interpolare i valori dei pixel (ad esempio per ingrandire un'immagine) o indirizzare i pixel in modo diretto anziché seriale (Franchi, 1981).

## 11.9 Considerazioni di confronto fra i vari sistemi di elaborazione numerica delle immagini

Come è stato indicato nei precedenti paragrafi, è disponibile un'ampia varietà di strutture e configurazioni per realizzare sistemi di elaborazione numerica delle immagini per i diversi settori applicativi. I quattro sistemi presentati più in particolare costituiscono esempi pratici di complessità e prestazioni crescenti.

In relazione all'applicazione specifica di elaborazione numerica delle immagini (dimensione delle immagini, quantità di immagini da acquisire ed elaborare, tempi di elaborazione richiesti ecc.), potrà essere definita la scelta fra uno dei precedenti sistemi.

Si stanno anche definendo soluzioni nuove più avanzate, basate ad esempio sull'uso di processori veloci su singolo chip operanti in parallelo per l'effettuazione delle operazioni aritmetiche e su memorie ad alta capacità e velocità di trasferimento (oltre che con dischi e nastri magnetici, anche con dischi ottici incisi con fasci laser). Si tende inoltre sempre più a sviluppare sistemi di elaborazione numerica delle immagini locali di tipo distribuito, eventualmente connessi a sistemi di elaborazione più grandi o interconnessi fra loro con linee di collegamento e scambio dati ad alta velocità.

## Riferimenti bibliografici

Cappellini V., Constantinides A. G., Emiliani P., *Digital Filters and Their Applications* (Academic Press, Londra e New York 1978).

– Odorico L., *A New Operator for Edge Detection*, in "Proceedings of IEEE Intern. Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing" (IEEE Press, Atlanta 1981).

Franchi P., *HACIENDA: a System for Color Image Display and Processing*, Rapporto Tecnico G513-3586, IBM Italia (1981).

*Special Report on Microprocessors/Microcomputers*, Computer Design, vol. 22, N. 11, 175-246 (1983).

# Capitolo 12

# Programmi di elaborazione

## 12.1 Introduzione

I diversi sistemi con calcolatori standard, minicalcolatori, microprocessori, circuiti digitali ad alta integrazione e dispositivi o apparati speciali, descritti nel precedente capitolo, sono in pratica utilizzati per l'elaborazione numerica delle immagini mediante la definizione e l'uso di appositi programmi di elaborazione.

I programmi di elaborazione sono messi a punto mediante l'uso di diversi linguaggi di programmazione, composti di istruzioni più o meno vicine al funzionamento effettivo della macchina da calcolo o dell'elaboratore utilizzato.

In questo capitolo, dopo un breve cenno ai diversi linguaggi attualmente utilizzati, sono presentate le caratteristiche generali dei programmi per l'elaborazione numerica delle immagini con alcuni esempi tipici relativi ad alcuni algoritmi di elaborazione, già descritti nei precedenti capitoli.

## 12.2 Considerazioni generali sui linguaggi e programmi di elaborazione

Le operazioni effettuate da una macchina da calcolo o elaboratore, nelle varie configurazioni descritte nel capitolo 11, sono in genere molto semplici (operazioni elementari di spostamento, somma, sottrazione, moltiplicazione ecc.). Pertanto ogni algoritmo o procedura di elaborazione (in particolare di segnali e di immagini) dev'essere descritto o rappresentato mediante un apposito programma, che consiste di una serie di istruzioni, composte a loro volta da caratteri di un certo alfabeto (i caratteri più comunemente usati sono i numeri decimali e le lettere del comune alfabeto). Le istruzioni, i caratteri e l'alfabeto in pratica utilizzati per un certo programma fanno in genere parte di un determinato linguaggio, che definisce esattamente come comporre con i caratteri dell'alfabeto le istruzioni richieste e le regole di combinazione delle istruzioni per il programma in esame.

L'elaboratore o macchina da calcolo effettua le operazioni elementari in base a proprie regole e relazioni logiche di funzionamento (con cui operano i circuiti digitali e le memorie interne), che costituiscono il linguaggio di macchina o linguaggio assoluto. In definitiva i vari linguaggi di elaborazione permettono di rappresentare gli algoritmi e le procedure di elaborazione (mediante le istruzioni di un programma) in una forma tale che sia comprensibile dal linguaggio di macchina e compatibile con le regole interne di funzionamento dell'elaboratore.

In effetti partendo dal linguaggio di macchina, di non facile uso se non per chi sia esperto della struttura interna della macchina o dell'elaboratore utilizzati, sono stati sviluppati molti linguaggi artificiali di elaborazione più facili per l'operatore, in quanto più orientati al problema di elaborazione da risolvere che alla struttura interna della macchina.

Sono stati sviluppati anche linguaggi speciali, particolarmente orientati ai problemi di elaborazione dei segnali e delle immagini. Due esempi significativi di questi linguaggi sono i seguenti: il linguaggio SPL/1 (Signal Processing Language/1), definito presso il Naval Research Laboratory degli Stati Uniti per l'elaborazione di segnali in tempo reale; il linguaggio ADA, adottato dal Dipartimento della Difesa americano come linguaggio ad alto livello, che unisce alla proprietà di elaborazione in tempo reale un'elevata sicurezza ed efficienza. Un altro interessante linguaggio speciale è il LISP, sviluppato presso il Massachusetts Institute of Technology per il settore dell'intelligenza artificiale; recentemente sono stati definiti sistemi di elaborazione strutturati sulla base di questo linguaggio.

Tornando a considerare i programmi di elaborazione, che possono essere scritti in uno dei linguaggi sopra indicati, si possono sottolineare alcune caratteristiche generali dei programmi stessi, indipendenti dal particolare linguaggio usato:

– completezza, per cui il programma deve avere in sé tutti i controlli necessari ad assicurare la validità del risultato (ad esempio, un programma completo per la progettazione di filtri numerici ricorrenti IIR deve prevedere la verifica della stabilità del filtro progettato);

– versatilità e generalità, per cui il programma dev'essere in grado di risolvere un determinato problema per una gamma sufficientemente ampia di casi particolari o di valori assegnati ai vari parametri (ad esempio un programma per il calcolo della trasformata di Fourier veloce FFT bidimensionale è in grado di operare su immagini di diversa dimensione nel campo di pratico interesse);

– modularità, per cui il programma deve essere scomponibile in sottoprogrammi (*subroutines*) o moduli, ciascuno dei quali corrisponde a una determinata operazione o trasformazione, possibilmente di complessità analoga, in modo da assicurare una struttura omogenea per l'intero programma;

– chiarezza, in modo che il programma (o sottoprogramma) sia steso in forma chiara e leggibile, non solo per chi lo ha preparato, ma anche per qualsiasi altro utente (con opportuni "commenti" che illustrino la funzione delle varie parti e il significato dei simboli impiegati).

Un aspetto particolarmente importante di ogni programma (come anche di ogni realizzazione circuitale "in hardware") riguarda la precisione di rappresentazione dei dati e delle elaborazioni effettuate (Cappellini, Constantinides, Emiliani, 1978).

Per quanto riguarda la rappresentazione dei dati numerici positivi o negativi, usando la base binaria (§ 3.3), sono utilizzate in pratica le seguenti forme:

– rappresentazione in grandezza e segno, nella quale si pone a sinistra della parola binaria che rappresenta la grandezza assoluta (e quindi vicino al bit più significativo) un valore binario (in genere 0 per indicare il segno positivo e 1 per il segno negativo);

– rappresentazione con complemento a 1, nella quale il negativo di una determinata parola binaria si ottiene sostituendo ogni bit con il suo complementare, compreso il bit di segno (0 per il valore positivo); ad esempio al numero $+3=0011$ corrisponde il numero $-3=1100$;

– rappresentazione con complemento a 2, nella quale si aggiunge 1 al complemento a 1 precedente, per ottenere il negativo; ad esempio il numero $-3$ diviene 1101.

Per la rappresentazione del valore assoluto, poi, si possono usare due notazioni principali: una corrispondente alla rappresentazione binaria normale, l'altra (con virgola mobile) corrispondente a separare il numero in due parti (mantissa ed esponente).

In relazione alle diverse rappresentazioni usate, sopra indicate, si può definire la precisione di rappresentazione ed elaborazione dei dati. Essa è determinata infatti da diversi tipi di errori:

– errori dovuti alla rappresentazione dei numeri (interi o razionali) sopra indicata e alla limitata disponibilità del sistema di elaborazione (a 16, 32, 64 bit): errori di troncamento e arrotondamento;

– errori insiti nel metodo di calcolo, per cui ad esempio, in uno sviluppo in serie di potenze, vengono trascurati alcuni termini di ordine elevato;

– errori dei dati di ingresso, dovuti alla imprecisione delle misure fisiche, ad errori di trascrizione (dalla forma originaria a quella acquisita dal sistema di elaborazione) o ad errori di attribuzione (alterazione, ad esempio, dell'ordine dei dati, con conseguente interpretazione errata da parte del programma);

– errori di conversione, nel passaggio da una base di numerazione a un'altra (ad esempio da decimale a binaria o viceversa), in particolare nelle unità di ingresso e di uscita.

## 12.3 Programmi di elaborazione delle immagini

Dopo le sintetiche osservazioni generali sui linguaggi e programmi di elaborazione con relativi problemi di rappresentazione dei dati e precisione, sopra riportate, indichiamo di seguito alcuni aspetti dei programmi di elaborazione delle immagini (Haralick, 1977).

L'elaborazione numerica delle immagini implica diverse fasi, dall'ingresso dei dati

alla loro elaborazione e presentazione in uscita dopo elaborazioni più o meno complesse (vedi cap. 11, fig. 11.1). Si possono così distinguere programmi diversi relativi alle varie fasi:

– programmi di ingresso-uscita, che permettono di acquisire i dati relativi alle immagini di ingresso (da telecamera, nastro o disco magnetico), strutturando opportunamente i dati stessi (valori, parametri, blocchi o sottoblocchi) e di trasferire i dati elaborati verso le unità di registrazione e presentazione (stampante, plotter, video);

– programmi di calcolo, che permettono di effettuare le varie operazioni matematiche richieste dagli algoritmi di elaborazione usati (filtraggio, riduzione dei dati, riconoscimento);

– programmi di gestione e controllo, che permettono di gestire in modo efficiente le varie parti del sistema di elaborazione con opportuni controlli sulla sequenza e correttezza delle operazioni effettuate (data la notevole quantità di dati che definiscono un'immagine, è di notevole importanza gestire in modo adeguato la memoria di massa, con la quale possono avvenire frequenti scambi di dati, da elaborare e già elaborati, e avere un'efficiente diagnostica sugli errori, anche indipendente dalla rivelazione d'errore da parte del sistema operativo).

I programmi di elaborazione delle immagini devono avere le caratteristiche di completezza, versatilità, modularità e chiarezza indicate nel precedente paragrafo. Di particolare importanza è la modularità, in quanto si hanno in genere molte fasi di elaborazione e si impiegano anche più volte consecutivamente algoritmi specifici: la scomposizione in sottoprogrammi può assicurare una maggiore efficienza di elaborazione globale con un migliore controllo delle varie fasi di elaborazione e relativa diagnostica degli errori. La modularità bene impostata permette anche di disporre di una "biblioteca" di sottoprogrammi di base, già pronti, da cui attingere per la risoluzione dei diversi problemi di elaborazione delle immagini nei vari settori applicativi.

In parte legato alla modularità è anche un altro aspetto di notevole rilievo per i programmi di elaborazione delle immagini: la trasportabilità, intendendo con ciò la possibilità di trasferire facilmente un determinato programma o diversi sottoprogrammi da un sistema di elaborazione ad un altro, senza doverlo sostanzialmente cambiare. Per una buona trasportabilità occorre, oltre all'uso di un linguaggio comune, predisporre il programma di adeguate istruzioni (in particolare iniziali e finali) che facilitino la sua acquisizione e utilizzazione da sistemi diversi. Attualmente il problema della trasportabilità è assai aperto, sia perché i diversi costruttori di sistemi di elaborazione tendono a privilegiare certi linguaggi o strutture di elaborazione, particolarmente legate ai propri sistemi, sia perché gli operatori e utenti dei sistemi sviluppano spesso programmi utilizzabili immediatamente solo sul sistema di cui essi dispongono.

## 12.4 Alcuni esempi di programmi di elaborazione

Descriviamo di seguito, a titolo d'esempio, alcuni semplici programmi per l'elaborazione delle immagini, scritti in linguaggio FORTRAN IV (Ridolfi, 1969).

Nella tabella 12.1 è riportata una semplice subroutine di acquisizione da telecamera di un'immagine e sua digitalizzazione, relativa al sistema di elaborazione S-2 con minicomputer PDP 11-34 (sistema RT-11):[1] VDS è l'interfaccia di acquisizione (vedi fig. 11.5) (Carlà, 1982); LUN è l'unità logica assegnata al terminale utente; IVD l'unità logica assegnata all'interfaccia video.

La tabella 12.2 riporta il programma per la trasformata di Fourier veloce (FFT) a una dimensione (secondo il metodo di Cooley e Tukey), che opera su numeri reali (Cappellini, Constantinides, Emiliani, 1978). Il programma può essere applicato direttamente a un segnale campionato, a un'immagine campionata per righe o colonne, oppure esteso alla forma bidimensionale.

Nella tabella 12.3 è presentata una subroutine per il calcolo dell'istogramma dei livelli di grigio, relativo a una particolare zona ("finestra") dell'immagine. Il vettore reale BUFFER presenta in uscita la densità di probabilità di ciascuno dei 256 livelli di grigio, normalizzata tra 0 e 1. Si ha: IVD = unità logica assegnata all'interfaccia video; (NXO, NYO) = coordinate dell'origine della finestra dell'immagine; (DIMX, DIMY) = dimensioni della finestra dell'immagine.

La tabella 12.4 riporta una subroutine per il filtraggio non-lineare passa-basso (*smoothing*). Si ha: IVD = unità logica assegnata all'interfaccia video; (NXO, NYO) = = coordinate dell'origine della finestra dell'immagine che viene elaborata; (INX, INY) = = dimensioni della finestra dell'immagine; ISOG = soglia ($0 \div 255$) che varia l'effetto di *smoothing* del filtro. La subroutine MATIN1 memorizza una parte dell'immagine presente sul video; la subroutine VDSOUT trasferisce sull'interfaccia video una riga di pixel contenuti nel vettore intero LINE; la subroutine NLF3 X 3, riportata di seguito, definisce un particolare algoritmo di *smoothing* (si fa la media dei livelli di grigio degli 8 pixel intorno a quello centrale e al livello di quest'ultimo si sostituisce la media ottenuta se essa differisce dal livello stesso per un valore della soglia fissata).

La tabella 12.5 presenta una subroutine per esaltazione del contrasto, secondo l'algoritmo di normalizzazione dell'istogramma (*linear stretching*). Si ha: INF = soglia inferiore; ISUP = soglia superiore con $0 \leqslant INF < ISUP \leqslant 255$; LINE = vettore intero contenente i nuovi valori calcolati dei 256 livelli di grigio.

La tabella 12.6 presenta una subroutine per estrazione dei contorni con il metodo del gradiente. Si ha: IVD = unità logica assegnata all'interfaccia video; (NXO, NYO) = = coordinate dell'origine della finestra dell'immagine che viene elaborata; (INX, INY) = = dimensioni della finestra dell'immagine. La subroutine MATIN1 memorizza una

[1] Allo stesso sistema si riferiscono in genere le subroutine seguenti, in particolare quelle di "interazione" con il video (Carlà, 1982).

Tabella 12.1 Subroutine di acquisizione da telecamera di un'immagine e sua digitalizzazione

```
C                       ACQS
C
C          ACQUISIZIONE DA TELECAMERA DI UNA
C          IMMAGINE E DIGITALIZZAZIONE
C
C                A = Acquisizione da Telecamera
C                D = Digitalizzazione
C                R = Reset Interfaccia Video
C                S = Return
C
C
C
           SUBROUTINE ACQS(LUN,IVD)
           LOGICAL*1 CMND
C
10         WRITE(LUN,100)
           READ(LUN,110)CMND
C
           IF(CMND.EQ.'A')CALL VDS(IVD,"164000)
           IF(CMND.EQ.'D')CALL VDS(IVD,"170000)
           IF(CMND.EQ.'R')CALL VDS(IVD,"130000)
           IF(CMND.EQ.'S')RETURN
           GOTO 10
C
100        FORMAT($X,'ACQ>')
110        FORMAT(A1)
C
           END
```

parte dell'immagine presente sul video; la subroutine VDSOUT trasferisce sull'interfaccia-video una riga di pixel contenuti nel vettore intero LINE.

Nella tabella 12.7 è riportato il programma di filtraggio numerico 2D FIR con funzioni finestra (in particolare del tipo di Lanczos o di Cappellini; vedi § 7.3) per immagini $64 \cdot 64$, con dimensioni del filtro variabili. Nel programma sono adottate semplificazioni legate alle proprietà di simmetria dei coefficienti di un filtro a fase lineare.

Nella tabella 12.8 sono riportati i tempi di calcolo per filtri di diversa dimensione con il sistema S-2 (fig. 11.5). Come si vede, pur tenendo conto delle semplificazioni introdotte, i tempi di elaborazione crescono rapidamente al crescere della dimensione del filtro (Giovani, 1981).

La figura 12.1 mostra il diagramma di flusso (*flow-chart*) di un programma per la riduzione o compressione dei dati con l'algoritmo di previsione di ordine zero (ZOP) a tolleranza fluttuante (§ 8.5), mentre nella tabella 12.9 è riportato il programma dettagliato (subroutine CCZOP) (Cappellini e altri, 1973).

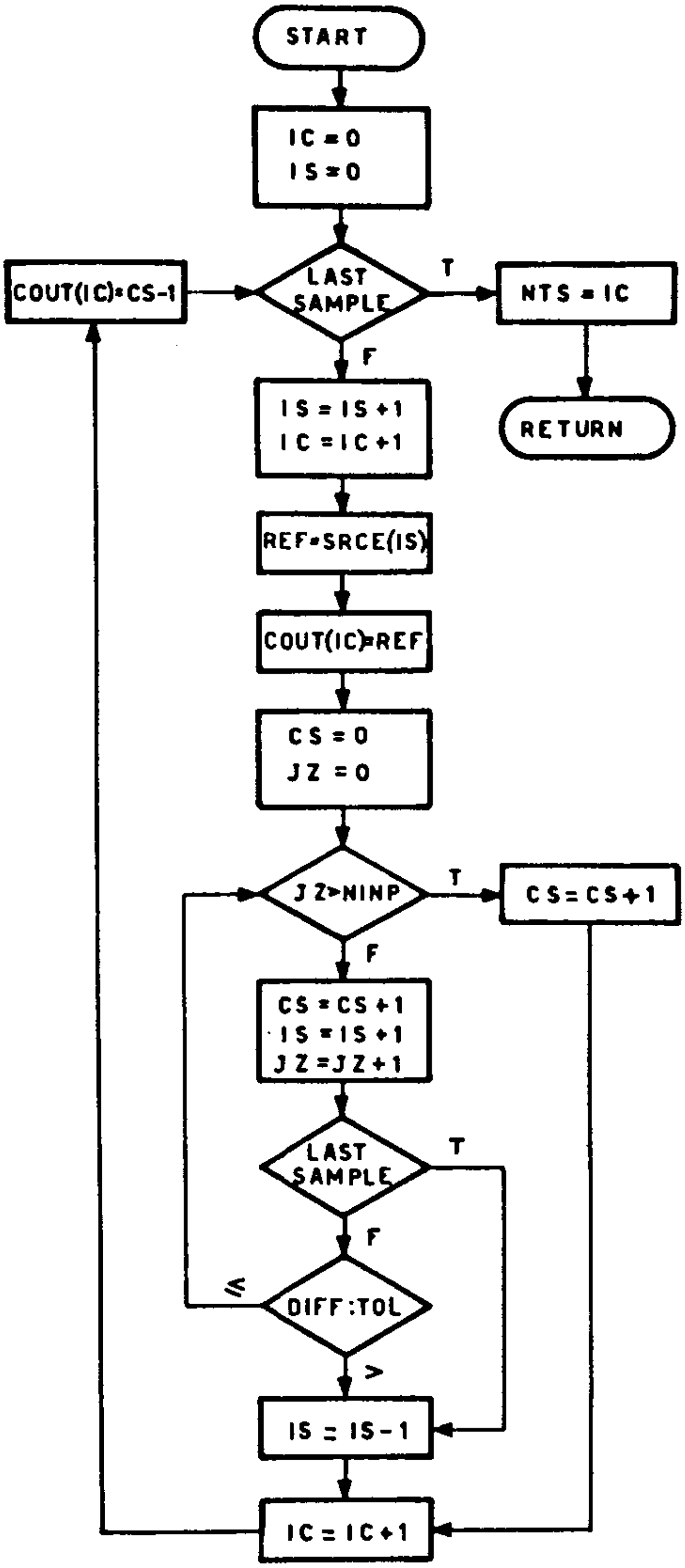



**Figura 12.1**
Diagramma di flusso di un programma per la riduzione o compressione dei dati con l'algoritmo di previsione di ordine zero (ZOP) a tolleranza fluttuante (programma dettagliato, subroutine CCZOP, in tab. 12.9). Le righe indicano: IS, indice del vettore d'ingresso SRCE; IC, indice del vettore compresso COUT; JZ, CS, contatori locali; DIFF = REF − SRCE(IS); NINP, componenti di SRCE; NTS, numero di campioni trasmessi.

Tabella 12.2 Programma per la trasformata di Fourier veloce (FFT) a una dimensione

```
      SUBROUTINE FFT(X,Y,N,M,IND)
C
C
C                 FFT ROUTINE
C
C     X = Real part of the function or of the spectrum (DIM,N)
C     Y = Imaginary part of the function or of the spectrum (DIM,N)
C     N = Number of points
C     M = Defined by the relation N=2**M
C     IND : 1=DFT , 2=IDFT
C
C     No Normalization is performed
C
C
C
      DIMENSION X(N),Y(N)
      NC=N/2
      PT=3.1415926535897932
      DO 20 L=1,M
      LE=2**(M+1-L)
      LE1=LE/2
      U1=1.0
      U2=0.0
      ARG=PI/LE1
      C=COS(ARG)
      S=(-1)**IND*SIN(ARG)
      DO 20 J=1,LE1
      DO 15 I=J,N,LF
      IP=I+LE1
      T1=X(I)+X(IP)
      T2=Y(I)+Y(IP)
      T3=X(I)-X(IP)
      T4=Y(I)-Y(IP)
      X(IP)=T3*U1-T4*U2
      Y(IP)=T4*U1+T3*U2
      X(I)=T1
15    Y(I)=T2
      U3=U1*C-U2*S
      U2=U2*C+U1*S
20    U1=U3
      NV2=N/2
      NM1=N-1
      J=1
      DO 30 I=1,NM1
      IF(I.GE.J)GOTO 25
      T1=X(J)
      T2=Y(J)
      X(J)=X(I)
      Y(J)=Y(I)
      X(I)=T1
      Y(I)=T2
25    K=NV2
26    IF(K.GE.J)GOTO 30
      J=J-K
      K=K/2
      GOTO 26
30    J=J+K
      RETURN
      END
```

Tabella 12.3 Subroutine per il calcolo dell'istogramma dei livelli di grigio, relativo a una particolare "finestra" dell'immagine

```
          SUBROUTINE ISTG(IVD,BUFFER,NXO,NYO,DIMX,DIMY)
          REAL*4 BUFFER(1)
          INTEGER*2 DIMX,DIMY,LINE(256)
    C
    C
          LEVELS=256                                  !GRAY LEVELS NUMBER
          PIXELS=FLOAT(DIMX)*FLOAT(DIMY)              !NUMBER OF POINTS
    C
          DO 10 J1=1,LEVELS                           !BUFFER RESET
          BUFFER(J1)=0.0
    10    CONTINUE
    C
          DO 30 J2=NYO,NYO+DIMY-1
          CALL VDSINP(IVD,NXO,J2,1,DIMX,LINE)         !READ NEXT ROW
    C
          DO 20 J3=1,DIMX                             !SUM ALL POINTS IN THE ROW
          BUFFER(LINE(J3)+1)=BUFFER(LINE(J3)+1)+1.0
    20    CONTINUE
    30    CONTINUE
    C
    C
          DO 40 J4=1,LEVELS                           !NORMALIZATION (0-1)
          BUFFER(J4)=BUFFER(J4)/PIXELS
    40    CONTINUE
    C
          RETURN
          END
```

**Tabella 12.4** Subroutine per il filtraggio non lineare passa-basso ("*smoothing*")

```
      SUBROUTINE NLF(IVD,NXO,NYO,INX,INY,ISOG)
      INTEGER*2 MAT(3,256),LINE(256)
C
C
      CALL MATIN1(IVD,MAT,3,INX,NXO,NYO+2)
      DO 20 J1=NYO+3,NYO+INY-1
C
      DO 10 J2=1,INX-2
      LINE(J2)=NLF3X3(MAT(1,J2),ISOG)
10    CONTINUE
C
      CALL MATIN1(IVD,MAT,3,INX,NXO,J1)
      CALL VDSOUT(IVD,NXO+1,J1-2,1,INX-2,LINE)
20    CONTINUE
C
      RETURN
      END
```

```
      FUNCTION NLF3X3(MAT,ISOG)
      INTEGER*2 MAT(9)
      DATA MAX/255/
C
      NLF3X3=MAT(5)
      MED=NINT(FLOAT(MAT(1)+MAT(2)+MAT(3)+MAT(4)+MAT(6)+
     *        MAT(7)+MAT(8)+MAT(9))/8.0)
      IF(IABS(MAT(5)-MED).GT.ISOG)NLF3X3=MED
      IF(NLF3X3.GT.MAX)NLF3X3=MAX
C
      RETURN
      END
```

**Tabella 12.5** Subroutine per esaltazione del contrasto: per ciascuno dei 256 livelli di grigio viene calcolato il nuovo valore secondo l'algoritmo di normalizzazione dell'istogramma (*linear stretching*)

```
      SUBROUTINE STRETC(INF,ISUP,LINE)
      INTEGER*2 LINE(1)
C
      LEVELS=256                              !NUMBER OF GRAY LEVELS
      DELTA=FLOAT(ISUP-INF)
      FACTOR=255./DELTA                       !CONVERSION FACTOR
C
      DO 10 J1=1,LEVELS                       !COMPUTE TRANSFORMATION
      LINE(J1)=J1-INF-1
      IF(LINE(J1).LT.0)LINE(J1)=0
      LINE(J1)=INT(LINE(J1)*FACTOR+0.5)
      IF(LINE(J1).GT.255)LINE(J1)=255
10    CONTINUE
C
      RETURN
      END
```

Tabella 12.6 Subroutine per estrazione dei contorni con il metodo del gradiente

```
      SUBROUTINE GRADNT(IVD,NXO,NYO,INX,INY)
      INTEGER*2 MAT(2,256),LINE(256)
C
      IGRAD(I)=IABS(MAT(2,I)-MAT(2,I+1))+IABS(MAT(2,I)-MAT(1,I))
C
C
      DO 20 J1=NYO+1,NYO+INY-1
      CALL MATIN1(IVD,MAT,2,INX,NXO,J1)
C
      DO 10 J2=1,INX-1
      LINE(J2)=IGRAD(J2)
10    CONTINUE
C
      CALL VDSOUT(IVD,NXO,J1-1,1,INX-1,LINE)
20    CONTINUE
C
      RETURN
      END
```

Tabella 12.7 Programma di filtraggio numerico 2D FIR con funzioni finestra per immagini 64 · 64, con dimensioni del filtro variabili (con descrizione iniziale)

```
C       ***********************************************************************************
C       *                                                                                 *
C       *                                   I C N V L                                     *
C       *                                                                                 *
C       ***********************************************************************************
C
C
C               NOME                    ICNVL
C               LINGUAGGIO              FORTRAN IV
C               TIPO                    FUNCTION
C
C
C
C
C
C       DESCRIZIONE :
C
C               Convoluzione della matrice immagine MAT con la matrice della risposta im-
C               pulsiva HIMP . Il risultato viene memorizzato in uscita nella matrice AIMG .
C
C.
C       CHIAMATA :
C
C               I=ICNVL(MAT,HIMP,AIMG,IPRM)
C
C
C       ARGOMENTI :
C
C               NOME    TIPO            DESCRIZIONE
C
C               MAT     Intero          Matrice dell'immagine da filtrare .
C               HIMP    Reale           Matrice della risposta impulsiva .
C               AIMG    Reale           Matrice contenente in uscita la immagine filtrata .
C               IPRM    Intero          Vettore che deve contenere 6 parametri forniti in
```

(segue)

```
C                                 input dal programma chiamante e descritti di seguito :
C                                 IPRM(1)=Numero righe immagine da filtrare .
C                                 IPRM(2)=Numero colonne immagine da filtrare .
C                                 IPRM(3)=Dimensione filtro .
C                                 IPRM(4)=Massima dimensione matrice risposta impulsiva .
C                                 IPRM(5)=Max numero righe matrici input ed output.
C                                 IPRM(6)=Max numero colonne matrici input ed output.
C
C
C     SEGNALAZIONI DI ERRORE :
C
C          Il valore intero assunto dalla FUNCTION in uscita dalla stessa , rappresenta
C          un flag d'errore o di operazione completata correttamente secondo il seguente
C          standard :
C
C                                 I=ICNVL( ... )
C
C                 I =  0          Operazione completata correttamente .
C                 I = -1          Dimensione dell'immagine troppo piccola rispetto alla
C                                 matrice di convoluzione .
C                 I = -2          Dimensione della matrice della risposta impulsiva
C                                 troppo grande rispetto al massimo specificato in
C                                 IPRM(4) .
C                 I = -3          Dimensione immagine superiore al massimo dichiara-
C                                 to in IPRM(5) e IPRM(6) .
C
C
C     ANNOTAZIONI :
C
C          Il risultato del filtraggio viene memorizzato nella matrice AIMG , senza
C          i 'bordi' non filtrati a partire dall'elemento AIMG(1,1) .
C          Il presente programma di convoluzione puo' essere utilizzato soltanto per
C          filtri FIR a FASE ZERO in quanto sfrutta la proprieta' di simmetria della
C          risposta impulsiva di tali filtri per limitare al minimo le operazioni di
C          prodotto .
C
C
```

```
C
C
      FUNCTION ICNVL(MAT,HIMP,AIMG,IPRM)
      INTEGER*2 IPRM(6),MAT(IPRM(5),IPRM(6))
      REAL*4 HIMP(IPRM(4),IPRM(4)),AIMG(IPRM(5),IPRM(6))
      DOUBLE PRECISION SUM,COUNT
C
C
C                   CONTROLLO ERRORI
C
C
      ICNVL=0                                  !RESET DEL FLAG D'ERRORE
      IF((IPRM(1).LT.IPRM(3)).OR.(IPRM(2).LT.IPRM(3)))GOTO 80
      IF(IPRM(3).GT.IPRM(4))GOTO 90            !DIMENSIONE FINESTRA TROPPO GRANDE
      IF((IPRM(1).GT.IPRM(5)).OR.(IPRM(2).GT.IPRM(6)))GOTO 100
C
C
C                   CALCOLO VARIABILI AUSILIARIE
C
C
      MZ=IPRM(3)/2
      MZ1=MZ+1
      NP=0                                     !RESET DEL FLAG DI PARITA'
      IF(MZ*2.EQ.IPRM(3))NP=1                  !SETTA IL FLAG SE PARI
C
C
C                   CONVOLUZIONE
C
C
      DO 70 II=1,IPRM(1)-IPRM(3)+1
      DO 60 JJ=1,IPRM(2)-IPRM(3)+1
C
      SUM=0.0                                  !RESET DEL BUFFER DI SOMMA
C
      ID1=II+IPRM(3)
      ID2=JJ+IPRM(3)
C
C
      IF(NP.EQ.1)GOTO 20
C
C
```

(*segue*)

```
            IR=II+MZ
            IC=JJ+MZ
      C
            SUM=DFLOAT(MAT(IR,IC))*HIMP(MZ1,MZ1)     !CONVOLUZIONE DEL PUNTO CENTRALE
      C
            DO 10 J1=MZ,1,-1                         !CONVOLUZIONE ASSI CENTRALI
      C
            SUM=SUM+DFLOAT(MAT(II+J1-1,IC)+MAT(IR,JJ+J1-1)+MAT(ID1-J1,IC)+
         *  MAT(IR,ID2-J1))*HIMP(MZ1,J1)
      C
      10    CONTINUE
      C
      C
      20    DO 50 J2=MZ,1,-1
            DO 40 J3=MZ,J2,-1
      C
            II1=II+J2-1
            II2=JJ+J3-1
            JJ1=ID1-J2
            JJ2=ID2-J3
      C
            COUNT=DFLOAT(MAT(II1,II2)+MAT(II1,JJ2)+MAT(JJ1,II2)+
         *  MAT(JJ1,JJ2))
      C
      C
            IF(J2.EQ.J3)GOTO 30
      C
      C
            II1=II+J3-1
            II2=JJ+J2-1
            JJ1=ID1-J3
            JJ2=ID2-J2
      C
            COUNT=COUNT+DFLOAT(MAT(II1,II2)+MAT(II1,JJ2)+MAT(JJ1,II2)+
         *  MAT(JJ1,JJ2))
      C
      C
      30    SUM=SUM+COUNT*HIMP(J2,J3)
      C
      40    CONTINUE
```

```
 50     CONTINUE
 C
 C
        AIMG(II,JJ)=SUM
 C
 C
 60     CONTINUE
 70     CONTINUE
        GOTO 120
 C
 C
 C                         DIAGNOSTICA
 C
 C
 80     ICNVL=-1                                !DIMENSIONE IMMAGINE TROPPO PICCOLA
        GOTO 120
 90     ICNVL=-2                                !DIMENSIONE FINESTRA TROPPO GRANDE
        GOTO 120
 100    ICNVL=-3                                !DIMENSIONE IMMAGINE SUPERIORE AL
 C                                              !MASSIMO DICHIARATO
 C
 120    RETURN
        END
```

Tabella 12.8 Tempi di calcolo per filtri numerici 2D FIR con "funzioni finestra" al variare della dimensione del filtro (immagini 64 · 64): sono confrontati i tempi ottenuti con programmi standard con quelli relativi al programma che usa semplificazioni legate alla proprietà di simmetria dei coefficienti (programma in tab. 12.7)

| Dimensione del filtro | 3·3 | 4·4 | 5·5 | 6·6 | 7·7 | 8·8 | 9·9 | 10·10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tempo di elaborazione standard (s) | 24 | 42 | 66 | 94 | 128 | 166 | 210 | 256 |
| Tempo di elaborazione veloce (s) | 13 | 17 | 28 | 33 | 48 | 55 | 74 | 82 |

Tabella 12.9 Subroutine per la compressione dei dati con l'algoritmo di previsione di ordine zero (ZOP) a tolleranza fluttuante

```
C    ZERO ORDER PREDICTOR (FLOATING APERTURE)
C    -------------------------------------
C
C    COMPRIMES THE VECTOR 'SRCE' ONTO 'COUT', INSERTING TIME IDENT.
C    TOL    =  TOLERANCE VALUE
C    NINP   =  NUMBER OF INPUT SAMPLES BEFORE COMPRESSION
C    NOUT   =  NUMBER OF INPUT SAMPLES AFTER COMPRESSION + TIME INSERTION
C
C **************************************************************
C
      SUBROUTINE CC (SRCE,NINP,TOL,COUT,NTS)
      DIMENSION SRCE(1),COUT(1)
      IC = 0
      IS = 0
   10 IF(IS-NINP) 11,20,20
   11 IS = IS + 1
      IC = IC + 1
      REF = SRCE(IS)
      COUT(IC) = SRCE(IS)
      CS = 0.
      DO 15 JZ = 1,NINP
      CS = CS+1.
      IS = IS + 1
      IF(IS-NINP) 13,13,17
   13 SCRT = ABS(SRCE(IS)-REF)
      IF(SCRT-TOL) 15,15,17
   15 CONTINUE
      CS = CS+1.
      GOTO 18
   17 IS = IS - 1
   18 IC = IC + 1
      COUT(IC) = CS-1.
      GOTO 10
   20 NTS=IC
      RETURN
      END
```

## Riferimenti bibliografici

Cappellini V., Lotti F., Pasquini G., Pieralli F., *Study on Data Compression and Queuing Statistics*, Final Report for the ESOC Contract 220/70 AR, Università di Firenze (1973).

– Constantinides A. G., Emiliani P., *Digital Filters and Their Applications* (Academic Press, Londra e New York 1978).

Carlà R., *Elaborazione di segnali da sistemi a microonde per il telerilevamento*, Tesi di laurea in Ingegneria elettronica, Università di Firenze (gennaio 1982).

Giovani M., *Sviluppo di tecniche di filtraggio numerico bidimensionale per l'elaborazione e la ricostruzione di immagini*, Tesi di laurea in Ingegneria elettronica, Università di Firenze (dicembre 1981).

Haralick R. H., *Image Access Protocol for Image Processing Software*, IEEE Trans. on Software Engineering, 3 (1977).

Ridolfi P., *Il FORTRAN: Teoria ed esercizi* (Angeli, Milano 1969).

# Capitolo 13

# Applicazioni nelle comunicazioni e nei sistemi radar

## 13.1 Introduzione

Le applicazioni dei metodi e delle tecniche di elaborazione numerica dei segnali e delle immagini nelle comunicazioni sono da tempo di grande importanza per aumentare l'efficienza globale delle comunicazioni stesse. Di particolare rilievo sono le applicazioni all'elaborazione e trasmissione a distanza di immagini fisse (facsimile) e di immagini in movimento (televisione).

Un altro settore nel quale sono state notevolmente sviluppate le applicazioni delle tecniche di elaborazione numerica è rappresentato dai sistemi radar e sonar, affine peraltro, per molti aspetti, a quello delle comunicazioni (si ha in questi sistemi la parte trasmittente e ricevente poste nello stesso posto, il canale di comunicazione essendo costituito dal mezzo interposto fra il sistema trasmittente-ricevente e il "bersaglio" cioè l'oggetto rilevato).

In questo capitolo sono illustrate le applicazioni delle tecniche di elaborazione numerica, in particolare delle immagini, ai settori sopra indicati, mettendo in evidenza l'aumento di efficienza che esse possono apportare.

## 13.2 Elaborazione e trasmissione di immagini fisse (facsimile)

Nel capitolo 2 sono già state indicate le caratteristiche generali dei sistemi di trasmissione a distanza di immagini fisse (caratteri stampati, mappe, figure, fotografie).

Consideriamo più in dettaglio la trasmissione a distanza di foglio dattiloscritto delle dimensioni A4 (297 mm × 210 mm). Ammettiamo che il foglio sia analizzato con un processo di scansione a linee: per una buona resa sono necessarie almeno 4 linee/mm e quindi si hanno in totale 1200 linee. In ogni linea si misurino 800 punti equidistanti se il foglio è bianco o nero (valore binario: 0 = bianco, 1 = nero). Occorrono pertanto circa 960000 bit per comunicare al ricevitore il contenuto del foglio

(Rocca, 1977). Analizzando più attentamente la struttura dei fogli dattiloscritti, si osserva facilmente che le sequenze di punti bianchi e neri hanno durata diversa (valore medio di circa 10 ÷ 15 per le sequenze bianche e 3 ÷ 4 per le sequenze di punti neri). Si può allora trasmettere con due codici diversi (parole di lunghezza diversa) le lunghezze delle sequenze di punti bianchi e neri: un dattiloscritto può così essere trasmesso con circa 0,3 bit/campione (circa 300000 bit totali), mentre grafici e mappe richiedono una quantità di dati anche minore. Ancora, si può tenere conto del fatto che in genere le lunghezze delle sequenze bianche e nere nella linea di scansione successiva non saranno molto diverse da quelle della linea in corso di trasmissione: si può pertanto trasmettere non le lunghezze delle sequenze, ma la variazione della loro lunghezza al passare da una linea alla successiva, utilizzando così la struttura bidimensionale del documento (Huang, 1972). D'altro lato, si può anche applicare il semplice algoritmo della previsione di ordine zero (ZOP) (§ 8.5), in modo da scartare tutti quei punti che sono correttamente previsti. Con queste ultime tecniche si può scendere a circa 0,2 bit/campione (circa 200000 bit totali) e anche meno. Disponendo di una linea telefonica per la trasmissione di questi dati con velocità di 4800 bit/s, si può inviare un foglio dattiloscritto completo in meno di 30 s.

Consideriamo ora la trasmissione a distanza di una fotografia o di un'immagine in bianco-nero: occorre tenere conto dei diversi valori di luminosità (livelli di grigio) per un'adeguata riproduzione in ricezione. Prendiamo in esame, più in particolare, il caso di una telefoto di dimensioni 13 cm X 18 cm: per un'adeguata risoluzione spaziale (teorema del campionamento, § 3.2) sono necessarie circa 8,6 linee/mm e pertanto occorrono circa 1500 linee con 1100 campioni ciascuna. Utilizzando una rappresentazione a 7 bit (128 livelli di grigio), risultano così in totale circa 11,5 Mbit per rappresentare l'intera foto (tempo di trasmissione pari a circa 40 minuti, operando a 4800 bit/s). Si possono però applicare le diverse tecniche di elaborazione numerica e in particolare di compressione dei dati. Ad esempio, con le tecniche più semplici del tipo a previsione (ZOP e FOP, § 8.5) o a modulazione differenziale (DPCM, § 8.7) si può scendere da 7 bit/campione a circa 4 bit/campione. Con tecniche di codifica a lunghezza di parola variabile, del tipo di Huffman, nelle quali viene assegnata una lunghezza maggiore ai livelli di grigio meno frequenti (con minore probabilità), si può ulteriormente scendere a 2 ÷ 3 bit/campione. A valori ancora più bassi (1 ÷ 2 bit/campione) si può arrivare mediante l'uso di trasformazioni (Fourier, Hadamard-Walsh, Karhunen-Loeve; vedi § 8.10), inviando i valori trasformati in modo completo o parziale (sopra una certa soglia, a frequenze "basse") (Huang, 1972).

## 13.3 Elaborazione e trasmissione di immagini in movimento

L'elaborazione e la trasmissione numerica di immagini in movimento (del tipo televisivo) pongono diversi problemi, date le alte frequenze in gioco. Nel caso del segnale televisivo in bianco-nero (standard europeo, 625 linee per quadro e 25 quadri/s o

50 semiquadri/s; vedi § 2.7), la banda di frequenza richiesta risulta di 5 ÷ 6 MHz. Secondo il teorema del campionamento occorrono almeno 10 ÷ 12 Mcampioni/s, ai quali corrispondono (con una rappresentazione a 7 bit) 70 ÷ 84 Mbit/s. In effetti, secondo le norme standard CCIR, la trasmissione numerica di un segnale televisivo bianco-nero richiede 80 Mbit/s.

Per ridurre i valori precedenti, sono state sperimentate e sono in parte già praticamente disponibili diverse tecniche di elaborazione numerica. Si hanno due soluzioni principali:

– tecniche "*intra-frame*", che utilizzano le correlazioni esistenti fra i pixel appartenenti alla stessa immagine per ridurre la quantità di dati necessaria a rappresentare l'immagine;
– tecniche "*inter-frame*", che utilizzano le correlazioni tra i pixel appartenenti a immagini successive, in genere in posizione spaziale uguale.

Le tecniche intra-frame possono essere analoghe a quelle usate per le immagini fisse (in quanto sono applicate immagine per immagine), ma è richiesta un'adeguata velocità di elaborazione: si può scendere a velocità di trasmissione dell'ordine di 20 ÷ 40 Mbit/s.

Le tecniche inter-frame si basano invece sull'individuazione della parte dell'immagine che è variata rispetto all'immagine precedente e sulla trasmissione solo di tale parte, che aggiorna la precedente immagine conservata in memoria: se l'operazione di "segmentazione" dell'immagine è fatta in modo efficiente, e se la parte variata dell'immagine viene a sua volta trasmessa con tecniche intra-frame, si può scendere a velocità di trasmissione anche molto inferiori a 10 Mbit/s. Tali valori più bassi sono in particolare ottenibili con tecniche più sofisticate, in cui si cerca di utilizzare l'informazione immagazzinata presso il ricevitore anche per le zone dell'immagine che hanno subìto una traslazione e che perciò sono mutate dal quadro precedente, ma che in qualche modo sono ancora "ricuperabili" (velocità 2 ÷ 4 Mbit/s).

Per le immagini televisive a colori è pure in atto una rapida evoluzione ed espansione dell'uso di tecniche di elaborazione e trasmissione numeriche, sia per i vantaggi di aumento di efficienza (a parte i costi), legati in particolare alla maggiore precisione e sicurezza[1] di rappresentazione dell'immagine, sia per l'interessante possibilità di conversione fra i vari formati attualmente utilizzati. In effetti si hanno tre sistemi di televisione a colori:

– sistema NTSC (National Television System Committee), sviluppato nel 1953 negli Stati Uniti e successivamente adottato anche in Giappone;
– sistema SECAM (*séquentiel couleur à mémoire*), sviluppato nel 1958 in Francia e poi adottato in Unione Sovietica e nei paesi dell'Est;
– sistema PAL (*phase alternation line*), sviluppato nel 1961 in Germania occidentale.

[1] La sicurezza, connessa alla rappresentazione binaria, è ulteriormente aumentabile mediante l'uso di tecniche di codifica a controllo d'errore (rivelazione o correzione).

Tali sistemi, incompatibili nella loro forma normale continua o analogica uno con l'altro, possono essere interconnessi o convertiti fra loro mediante tecniche numeriche. Sono in esame diverse soluzioni:

– campionamento con 12 Mcampioni/s per il segnale di luminanza e di 4 Mcampioni/s per i segnali di crominanza in Europa;
– campionamento con 14 Mcampioni/s per il segnale di luminanza e di 7 Mcampioni/s per il segnale di crominanza negli Stati Uniti e in Giappone.

Risultano così velocità di trasmissione globali pari a 100÷120 Mbit/s per il segnale televisivo a colori. Utilizzando tecniche del tipo precedente di codifica intra-frame e interframe, sono stati già sperimentati sistemi a velocità minori: sistemi con 45 Mbit/s che utilizzano tecniche di codifica dei segnali differenza tra due *frame* successivi (Bell Laboratories); sistemi con 15÷30 Mbit/s utilizzanti codifiche intra-frame e inter-frame (Nippon Electric).

Per alcune applicazioni, nelle quali le immagini variano più lentamente della normale situazione televisiva o per le quali è accettabile una qualità minore del segnale video in ricezione, le precedenti velocità di trasmissione, per segnali televisivi in bianco-nero e a colori, possono essere notevolmente diminuite. Tre applicazioni di notevole interesse, su questa linea, sono le seguenti: teleconferenze, videotelefonia, controllo di processi e di impianti. Una caratteristica comune di queste applicazioni è in effetti rappresentata dal fatto che le scene, in genere, cambiano lentamente (volti di persone che parlano e quindi con movimenti essenzialmente limitati alle labbra o mani, oggetti in gran parte fermi salvo piccoli movimenti o movimenti più rilevanti di pochi oggetti nella scena) e quindi tecniche di codifica inter-frame possono assicurare forti riduzioni di dati, ulteriormente riducibili con elaborazioni dei dati in ciascun quadro. Sono state effettuate esperienze con velocità di trasmissione nel campo di 100 kbit/s÷1 Mbit/s, con buona riproduzione di immagini in bianco-nero e anche a colori.

Accettando poi una diminuzione di qualità più o meno rilevante, che comunque mantiene le caratteristiche salienti della scena osservata (ad esempio, per un conferenziere o interlocutore telefonico mantenendo il movimento delle labbra), sono state effettuate esperienze a velocità ridotte a decine di kbit/s (negli Stati Uniti, la Compression Labs ha sviluppato un sistema a 9,6 kbit/s per teleconferenze; presso l'Università di Essex in Gran Bretagna sono stati sperimentati sistemi con cadenze da 1,2 kbit/s a 100 kbit/s, verificando che una qualità accettabile per molti scopi si ha intorno a 5 kbit/s). Nel caso di collegamenti fra parlatori, presso il Massachusetts Institute of Technology (Stati Uniti) è stato sperimentato un sistema con cadenze dell'ordine di solo 200 bit/s, che si basa sulla memorizzazione di alcune espressioni facciali tipiche (con relative posizioni delle labbra) e sulla trasmissione in codice delle diverse possibili configurazioni facciali (Oppenheim, 1981).

## 13.4 Sistemi di telemisura e comunicazioni con elaborazioni numeriche integrate

Nei diversi sistemi di trasmissione a distanza di segnali e immagini in forma numerica (sistemi di telemisura e comunicazione), l'uso di diverse elaborazioni o trasformazioni numeriche in cascata in forma "integrata" può aumentare notevolmente l'efficienza dei sistemi stessi.

Oltre alle elaborazioni esaminate nei precedenti paragrafi, volte a ridurre la quantità dei dati e quindi anche delle bande di frequenze richieste, sono di notevole interesse altre elaborazioni e trasformazioni, quali il filtraggio numerico e la codifica a controllo d'errore. Queste ultime elaborazioni possono in particolare migliorare notevolmente l'efficienza del sistema di telemisura e comunicazione per quanto riguarda i disturbi e il rumore introdotti dal "canale di comunicazione".

In effetti, con il filtraggio numerico (vedi cap. 7) si possono ridurre disturbi e rumore sia in trasmissione sia in ricezione (con semplici filtri passa-basso o più complessi filtri adattati o inversi) con il vantaggio, già enunciato (§ 8.9), di predisporre i dati in forma più facilmente comprimibile dalle tecniche diverse precedentemente indicate.

Con la codifica a controllo d'errore (semplice rivelazione degli errori o anche loro correzione) è possibile mettere i dati che devono attraversare il canale di comunicazione in una forma tale che siano adeguatamente protetti anche in situazioni di rumore particolarmente gravose e difficili: in particolare, possono essere utilizzati codici di Hamming, codici ciclici e codici convoluzionali con decodifica a soglia o sequenziale (questi ultimi di complessità, ma anche efficienza, maggiori) (Benelli, Bianciardi, Cappellini, Del Re, 1977).

La figura 13.1 mostra la struttura schematica di una comunicazione numerica (o telemisura numerica) con le tre elaborazioni o trasformazioni numeriche in cascata in trasmissione e ricezione: filtraggio numerico (1D o 2D), riduzione e compressione dei dati, codifica a controllo d'errore. Le tre tecniche possono essere efficientemente integrate. In particolare il filtraggio numerico può essere "adattato" alla successiva compressione dei dati e quest'ultima alla codifica a controllo d'errore. Una nuova tecnica, recentemente introdotta e denominata COSDI (*compression with synchronization control and data interpolation*), permette di effettuare, con un'unica trasformazione, sia compressione dei dati sia codifica a correzione d'errore: in questa tecnica l'informazione di sincronizzazione (necessaria per tutte le comunicazioni numeriche, e in particolare per quelle con operazioni di compressione dei dati) viene utilizzata in ricezione per rivelare e correggere gli errori introdotti dal canale, ricostruendo i dati alterati dal rumore con apposite operazioni di interpolazione (Barducci, Benelli, Cappellini, Del Re, 1978).

A titolo d'esempio, nella figura 13.2 è poi mostrata la struttura di un moderno sistema di comunicazione numerica via satellite per il collegamento fra stazioni di trasmissione a terra e terminali sulle navi (sistemi MARISAT, MARECS) con invio

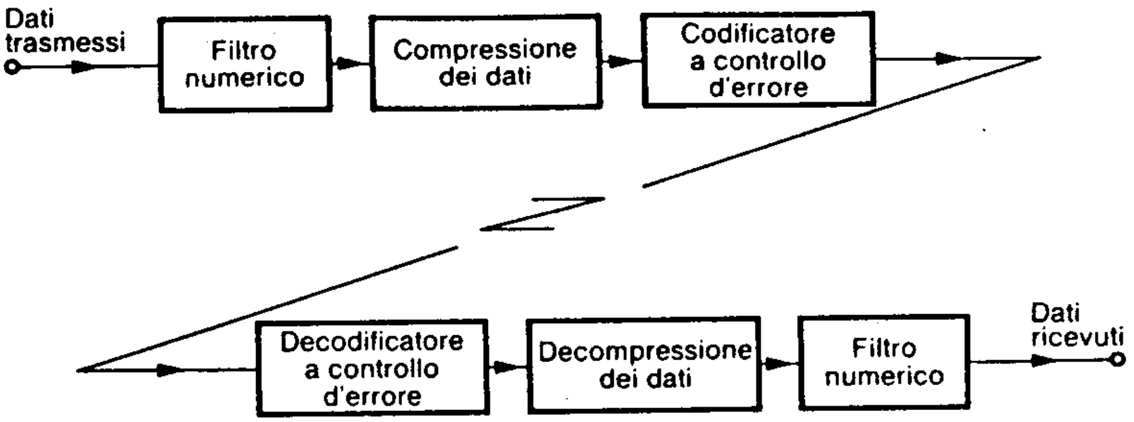



**Figura 13.1**
Struttura a blocchi di un sistema di comunicazione (o telemisura) numerica, comprendente tre elaborazioni numeriche in cascata in trasmissione e ricezione: filtraggio numerico (1D o 2D), riduzione o compressione dei dati, codifica a controllo d'errore.

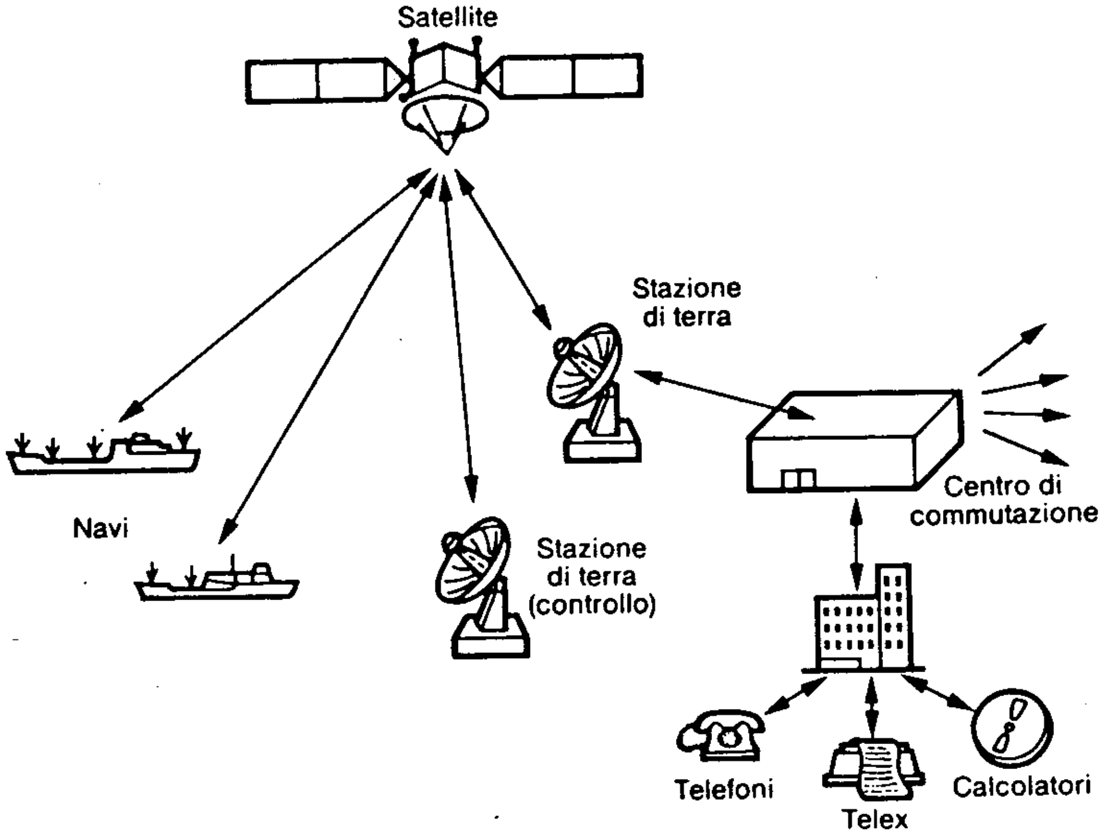



**Figura 13.2**
Schema illustrativo di un sistema di comunicazione numerica via satellite per il collegamento fra stazioni di trasmissione a terra (*GS*) e terminali sulle navi: sono utilizzate tecniche di riduzione dei dati e di codifica a correzione d'errore (una delle stazioni *GS* ha scopo di controllo e supervisione sull'intero sistema).

di dati, conversazioni telefoniche e immagini di facsimile, utilizzando opportune tecniche di riduzione dei dati e codifica a correzione d'errore (Bertini, Cappellini, 1980).

E' infine da sottolineare che i sistemi numerici integrati con diverse elaborazioni in cascata sono di interesse crescente per i sistemi di telemisura sia spaziali (da veicoli spaziali a terra) sia in collegamenti terrestri: in quest'ultimo ambito sono da inserire i sistemi di telemedicina, nei quali si inviano segnali biomedici (ECG, EEG, pressione cardiaca ecc.) e immagini biomediche (di medicina nucleare, ultrasuoni, raggi X) da terminali di controllo a centri di raccolta e controllo (cliniche, ospedali).

## 13.5 Telematica

Negli ultimi anni, a seguito dell'evoluzione delle telecomunicazioni sempre più verso le tecniche numeriche e degli straordinari sviluppi dell'informatica, sia sui dispositivi e sistemi (hardware) sia nella programmazione e gestione (software), si è determinato un vero e proprio connubio fra "*tele*comunicazioni" e "infor*matica*" che ha prodotto la cosiddetta "*telematica*" (Cappellini, 1983).

L'aspetto più significativo della telematica riguarda proprio le immagini, rappresentate, trasmesse ed elaborate con tecniche numeriche. In effetti i diversi servizi di telematica mirano a trasferire da un posto all'altro immagini (oltre a quelle televisive) relative a diverse sorgenti di informazione (testi scritti, documenti, disegni, foto ecc.). Fra i servizi più importanti sono da segnalare:

– videotext, consistente nell'invio di immagini attraverso le reti telefoniche (in Italia è iniziato da parte della SIP il servizio Videotel);[2]
– teletext, che utilizza le reti televisive per inviare immagini di testi scritti, annunci, disegni ecc.;
– posta elettronica (invio della corrispondenza sotto forma di segnali e immagini);
– facsimile veloce (§ 13.2);
– telex veloce;
– teleconferenza (§ 13.3).

Con i servizi precedenti l'utente (nell'ambiente di lavoro, in fabbrica o in ufficio, e nell'ambiente domestico) può accedere a una quantità enorme di dati informativi, in gran parte trasmessi e rappresentati in forma di immagini numeriche, provenienti in particolare da grandi centri di raccolta, elaborazione e archivio (le cosiddette "banche di dati").

[2] Per la ricezione di queste immagini, viene in genere utilizzato un comune televisore, opportunamente modificato (con una interfaccia).

## 13.6 Elaborazioni numeriche in sistemi radar

Nel paragrafo 2.7 sono state sinteticamente indicate le caratteristiche generali dei sistemi radar e delle relative immagini o mappe. La figura 13.3 mostra uno schema strutturale di un sistema radar, nel quale il segnale ricevuto, che contiene l'informazione degli oggetti (o "bersagli") avvistati, viene elaborato con tecniche discrete o numeriche per estrarre in modo più efficiente l'informazione stessa, producendo una mappa chiara con la massima riduzione dei disturbi e del rumore.

In effetti si possono effettuare due elaborazioni in cascata: una prima elaborazione sul segnale ricevuto (nei vari stadi del ricevitore ed "estrattore") in modo da ridurre i disturbi e il rumore (*clutter*) in cui è immerso il segnale utile con tecniche 1D. Tipico elaboratore usato è il filtro "adattato" al segnale, cioè avente una risposta impulsiva pari alla replica temporale del segnale, rovesciata nel tempo; tale quindi che (Cappellini, Constantinides, Emiliani, 1978):

$$h(t)=Ks(t_0-t) \qquad [13.1]$$

ove $s(t)$ è il segnale trasmesso, $K$ una costante e $t_0$ un ritardo temporale costante. Tale filtro assicura il massimo rapporto segnale/rumore ($S/N$) in ricezione, in presenza di rumore additivo bianco gaussiano. Il filtro stesso può essere agevolmente realizzato con tecniche discrete (a dati campionati) o numeriche (cap. 7). Un altro elaboratore 1D utile è il cosiddetto filtro MTI (*moving target indicator*) per riconoscere oggetti in movimento dalla variazione Doppler di frequenza: esso può essere in particolare realizzato con un filtro a dati campionati o numerico FIR del secondo ordine (Bozzi e altri, 1982).

Una seconda elaborazione può essere effettuata sul segnale 2D corrispondente al tracciamento della mappa radar, in particolare con filtri discreti o numerici 2D che riducano ulteriormente effetti di disturbi e rumore, o esaltino le frequenze spaziali relative alla rappresentazione degli oggetti o bersagli rivelati. E' da notare che quest'elaborazione 2D, essendo la mappa ottenuta con una scansione circolare, può essere

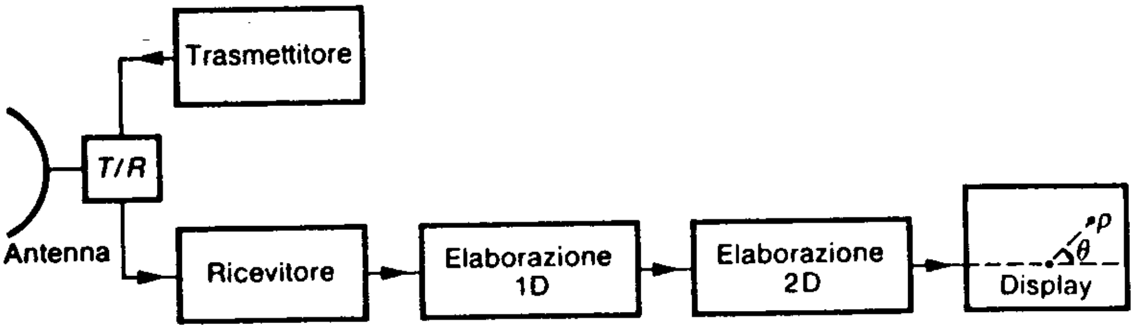



Figura 13.3
Schema a blocchi di un sistema radar con elaborazione (discreta o numerica) 1D e 2D del segnale ricevuto.

convenientemente effettuata anche in coordinate 2D polari (ad esempio distanza $\rho$ di un punto dal centro e angolo $\theta$ fra la congiungente di esso con il centro e una direzione di riferimento, come indicato in fig. 13.3).

Spesso è sufficiente una buona elaborazione 1D, che dà notevoli effetti sulla migliore discriminazione degli oggetti sulla mappa finale: un esempio di questo tipo, relativo all'uso di un filtro MTI del secondo ordine FIR con dispositivi CTD (*charge transfer device*, dispositivo a trasferimento di carica), nei quali viene tenuto conto dell'inefficienza di trasferimento della carica, è mostrato nella tavola 13 (Bozzi e altri, 1982).

Analoghe considerazioni possono essere effettuate per l'elaborazione discreta o numerica di mappe ottenute da apparati sonar (operanti in banda acustica) o da apparati lidar (operanti in banda ottica o frequenze vicine) (vedi § 2.7).

## Riferimenti bibliografici

Barducci M., Benelli G., Cappellini V., Del Re E., *Nuovo metodo di codifica con comprensione dei dati per telemisure con mezzi mobili*, in "Atti Riunione Annuale AEI", II.7 (AEI, Milano 1978).

Benelli G., Bianciardi C., Cappellini V., Del Re E., *High Efficiency Digital Communications Using Data Compression and Error Correction Codes*, in "Proceedings EUROCON" (EUREL, Venezia 1977).

Bertini S., Cappellini V., *Some Aspects of Maritime Satellite Communications*, in "Proceedings of International Telecomunication Conference" (INTELCOM, Rio de Janeiro 1980).

Bozzi S., Capigatti U., Cappellini V., Del Re E., Margheri M., Saltini I., *CTD MTI Radar Filter with Charge-transfer Inefficiency Compensation*, Transactions on Aerospace and Electronics Systems, col. AES-31, N. 2 (1982).

Cappellini V., *La telematica e la robotica per lo sviluppo delle attività industriali*, Rapporto del Dipartimento di Ingegneria elettronica, Università di Firenze (dicembre 1983).

– Constantinides A.G., Emiliani P., *Digital Filters and Their Applications* (Academic Press, Londra e New York 1978).

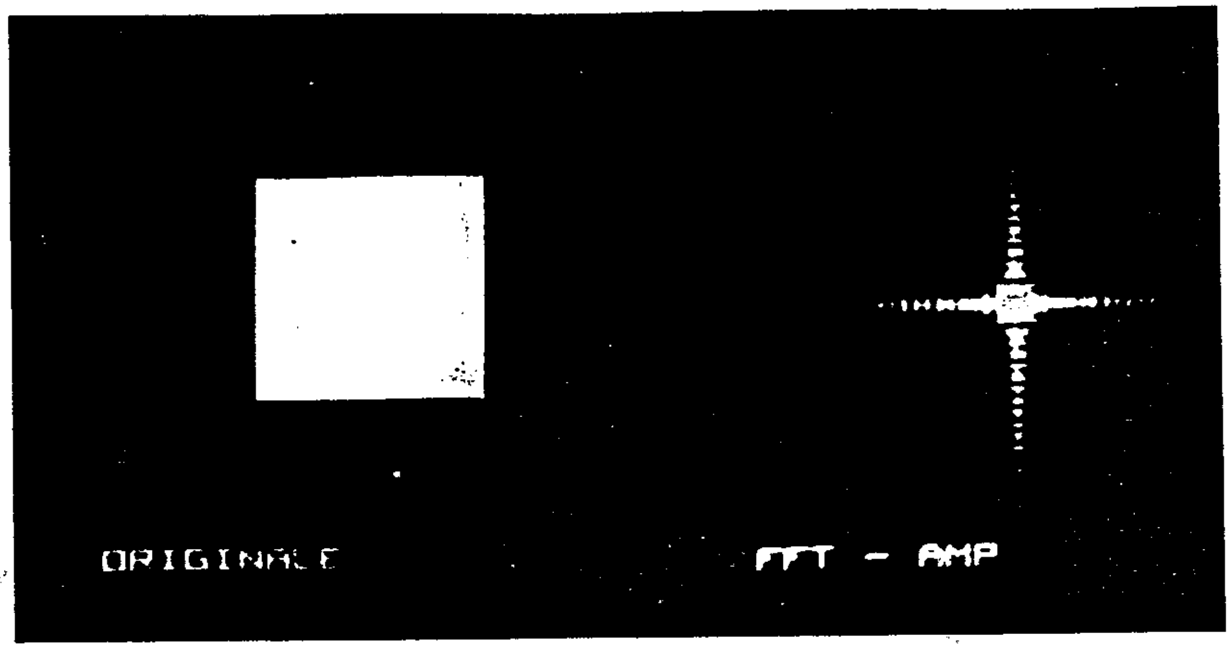
Huang T.S., *Coding of Graphics*, in Huang T.S. (a cura di), "Picture Bandwidth Compression" (Gordon & Breach, New York 1972).

Oppenheim A.V. (a cura di), *Digital Video*, in "Trends & Perspectives in Signal Processing", vol. 1, N. 3, 1-4 (1981).

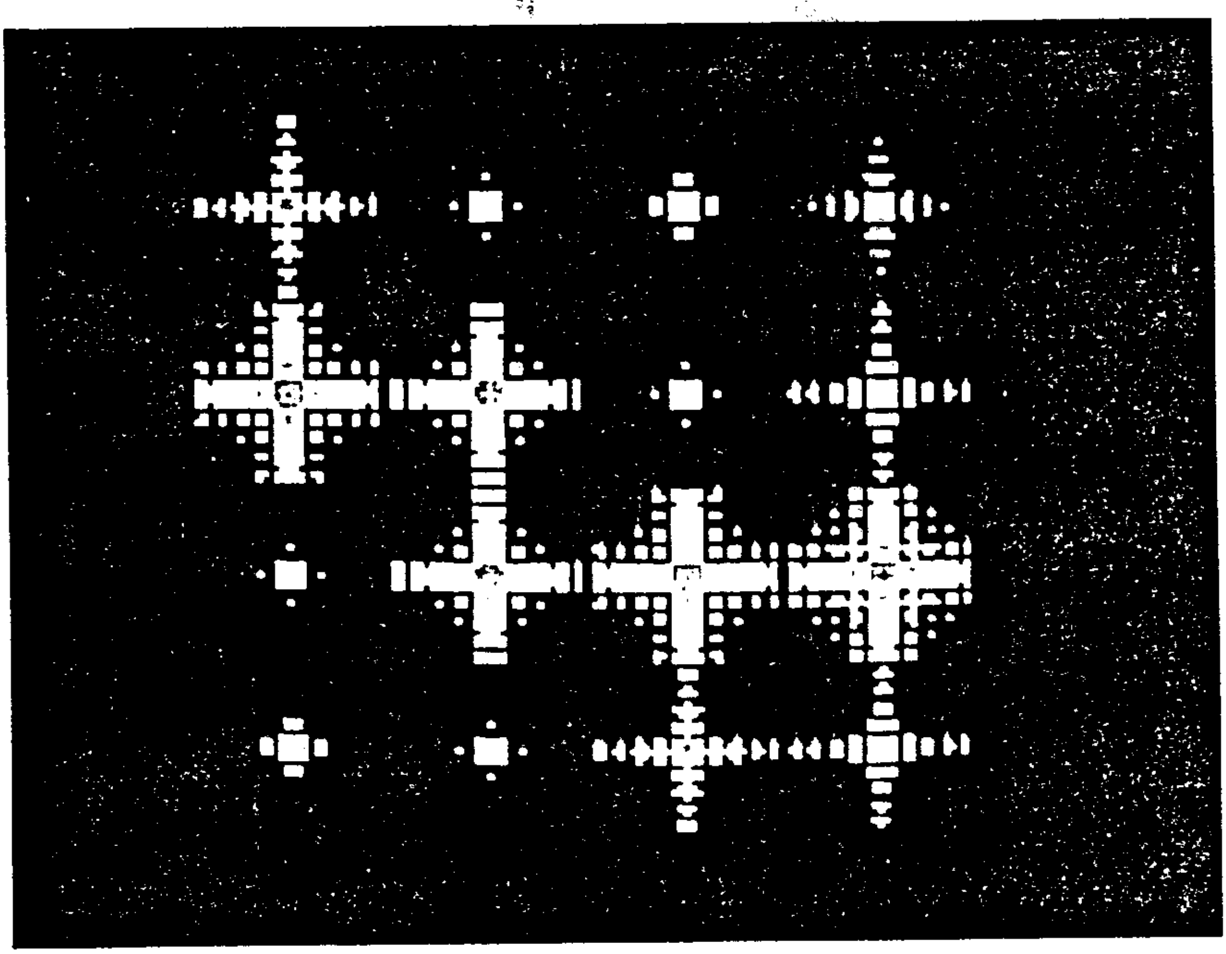
Rocca F., *Trasmissioni di immagini*, in Cappellini V., Rocca F. (a cura di), "Elaborazione numerica delle immagini", 19-49, Rapporto CNR (Firenze 1977).

# TAVOLE

2 Rappresentazione di un volto con $2^8 = 256$ livelli.



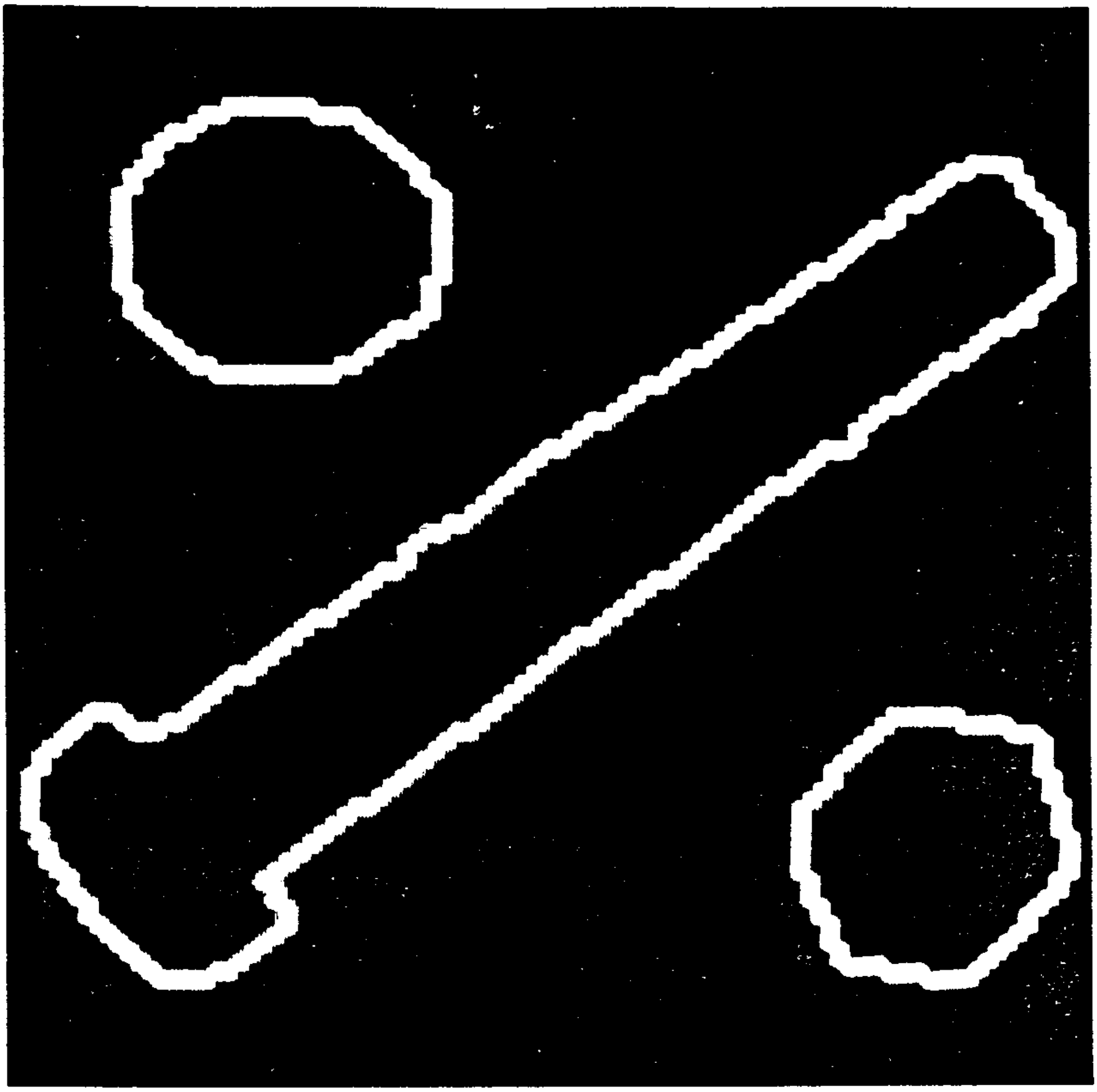

1A Esempio di FFT 2D (ampiezza) effettuata su immagine di prova (quadrato bianco).



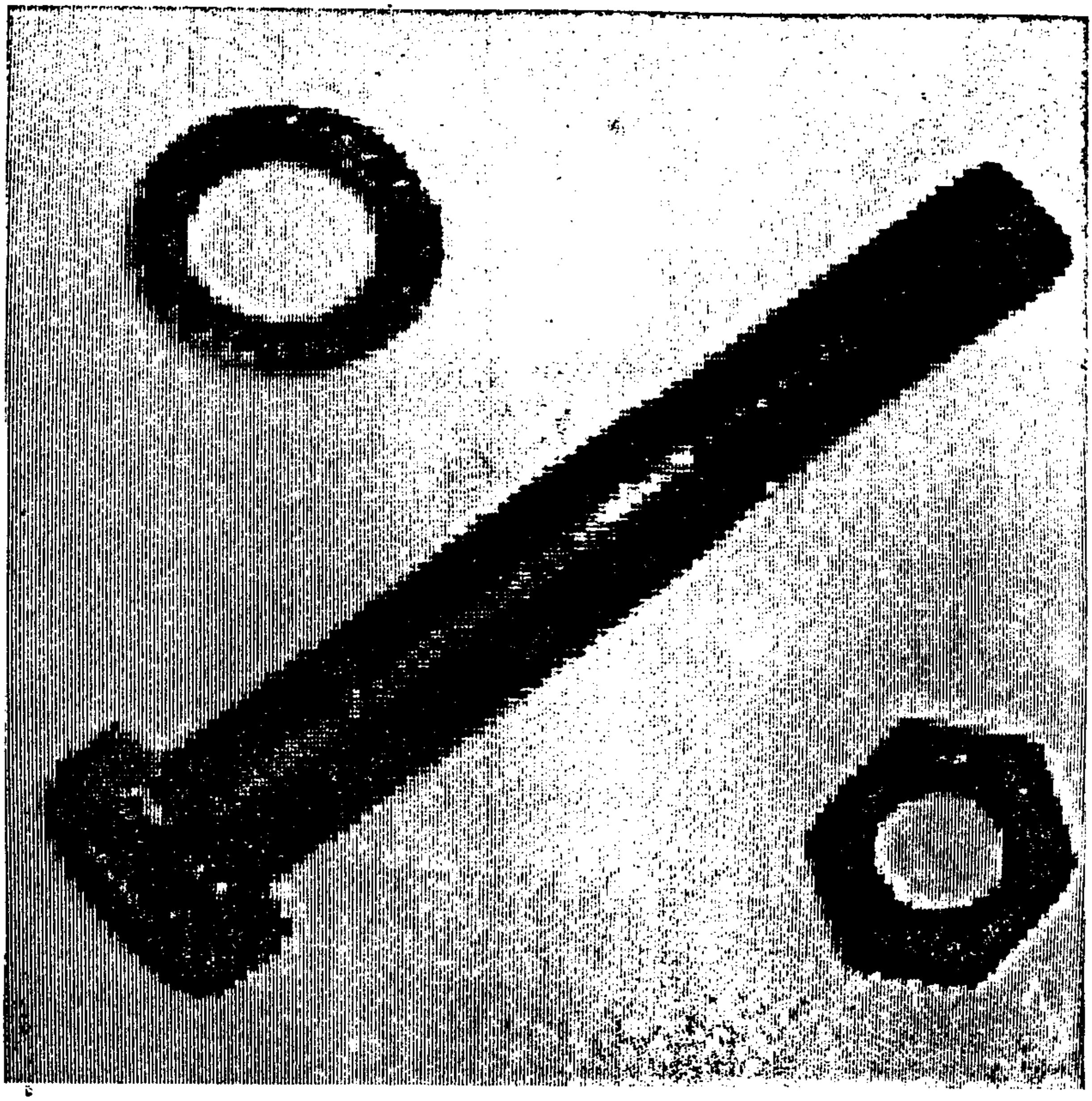
1B Esempio di FFT 3D (ampiezza) effettuata su funzione tridimensionale di prova (cubo). Sono mostrate successive sezioni secondo l'asse $\omega_z$; ogni sezione rappresenta uno spettro bidimensionale in $\omega_x$, $\omega_y$ (del tipo illustrato nella tavola 1A).

3 Lo stesso volto di tavola 2 con due soli livelli di grigio.

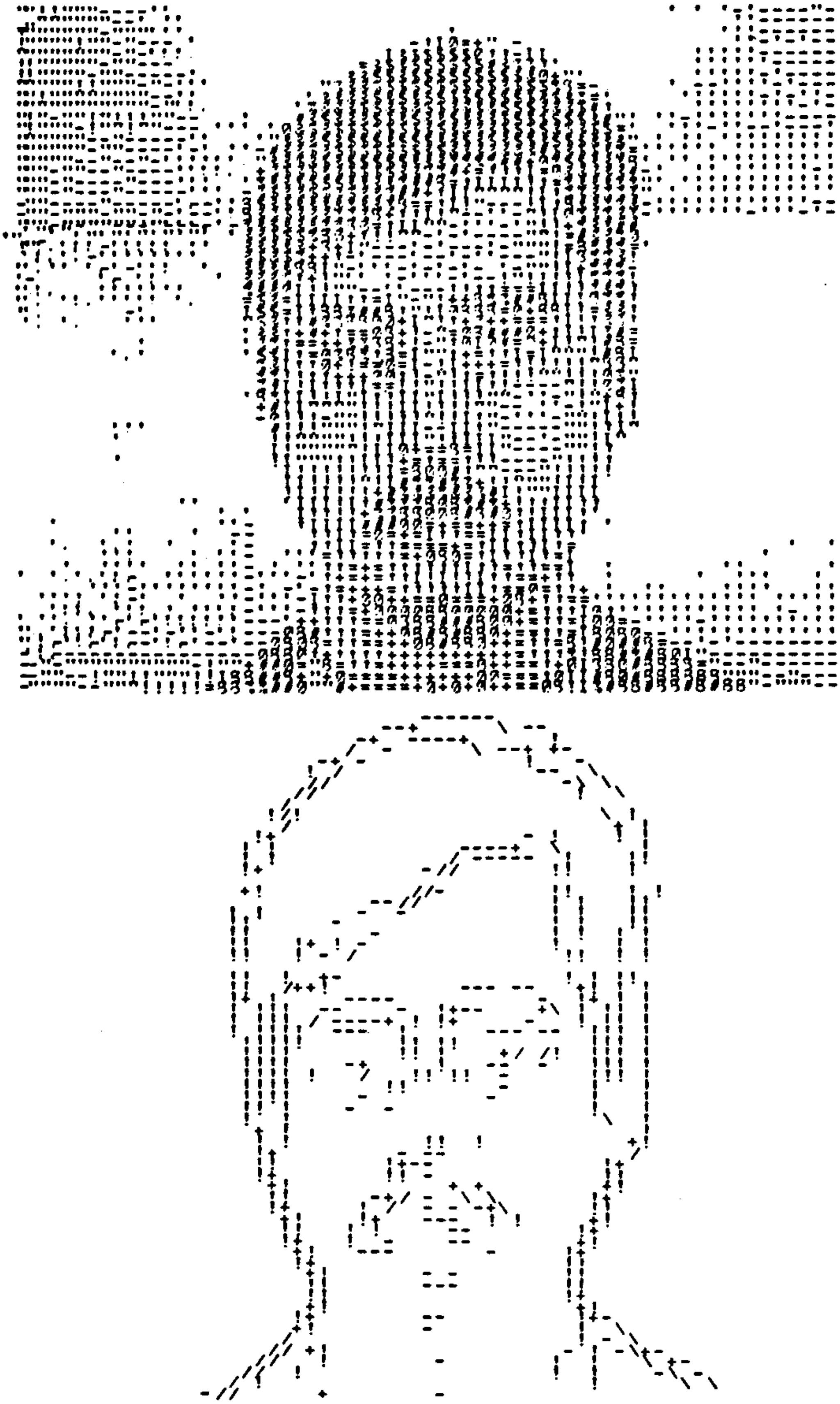
2 Rappresentazione di un volto con $2^8 = 256$ livelli.



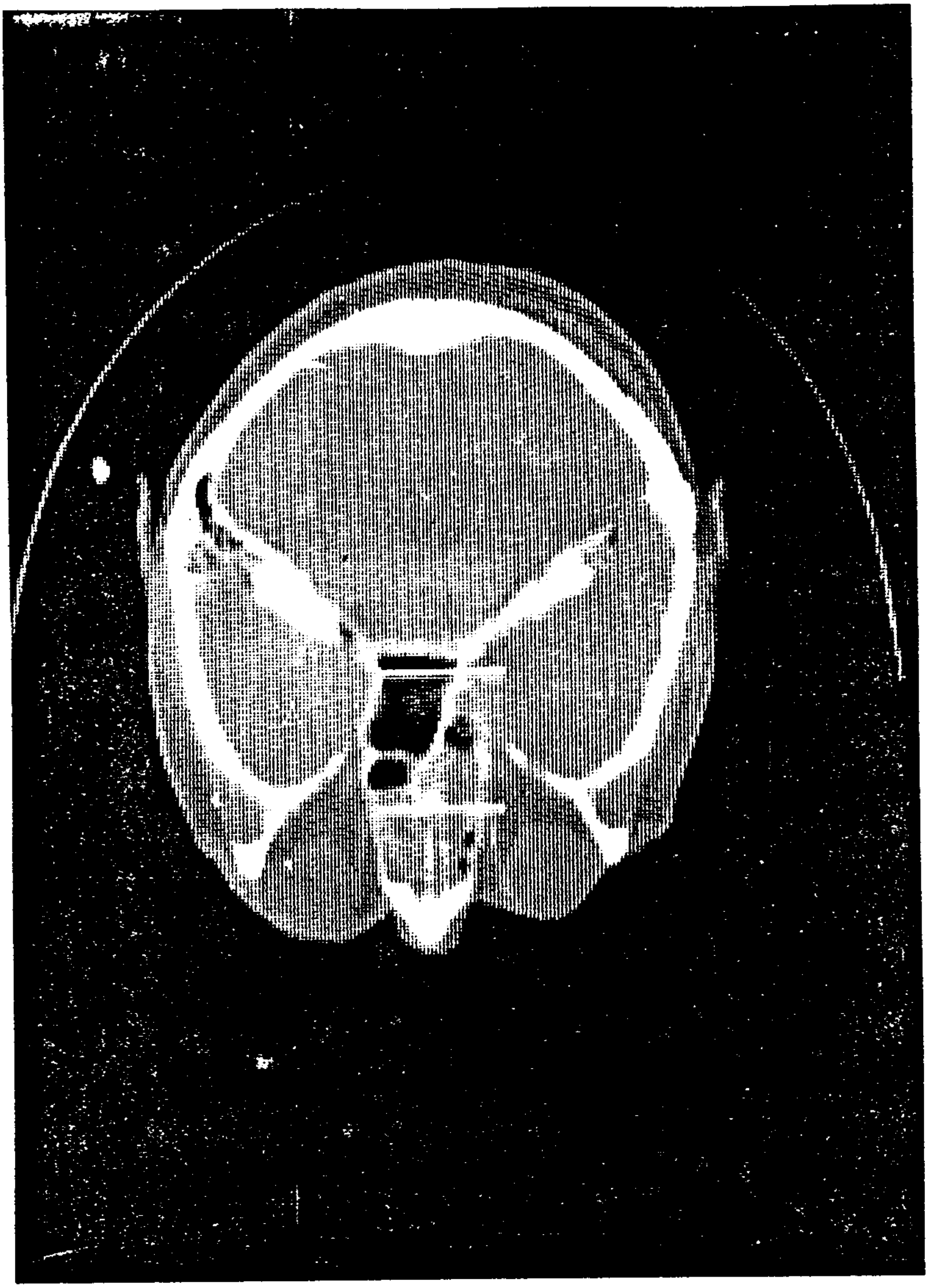
5 Estrazione dei soli contorni esterni dalla stessa immagine, acquisita in forma numerica, rappresentata nella tavola 4.



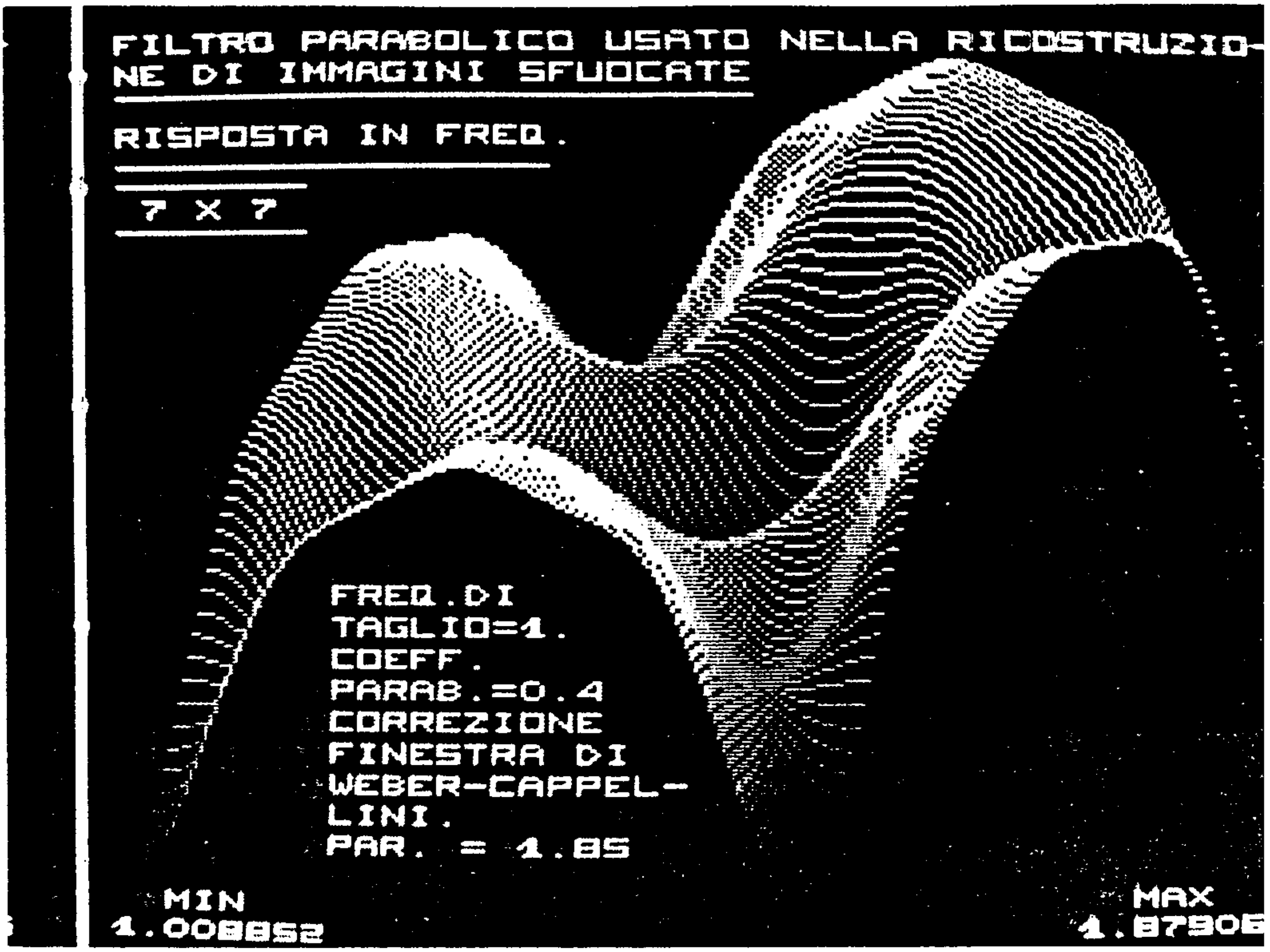
4 Esempio di estrazione dei contorni con operatore del tipo di Sobel: immagine acquisita in forma numerica (dal sistema S-2) (vedi cap. 11).



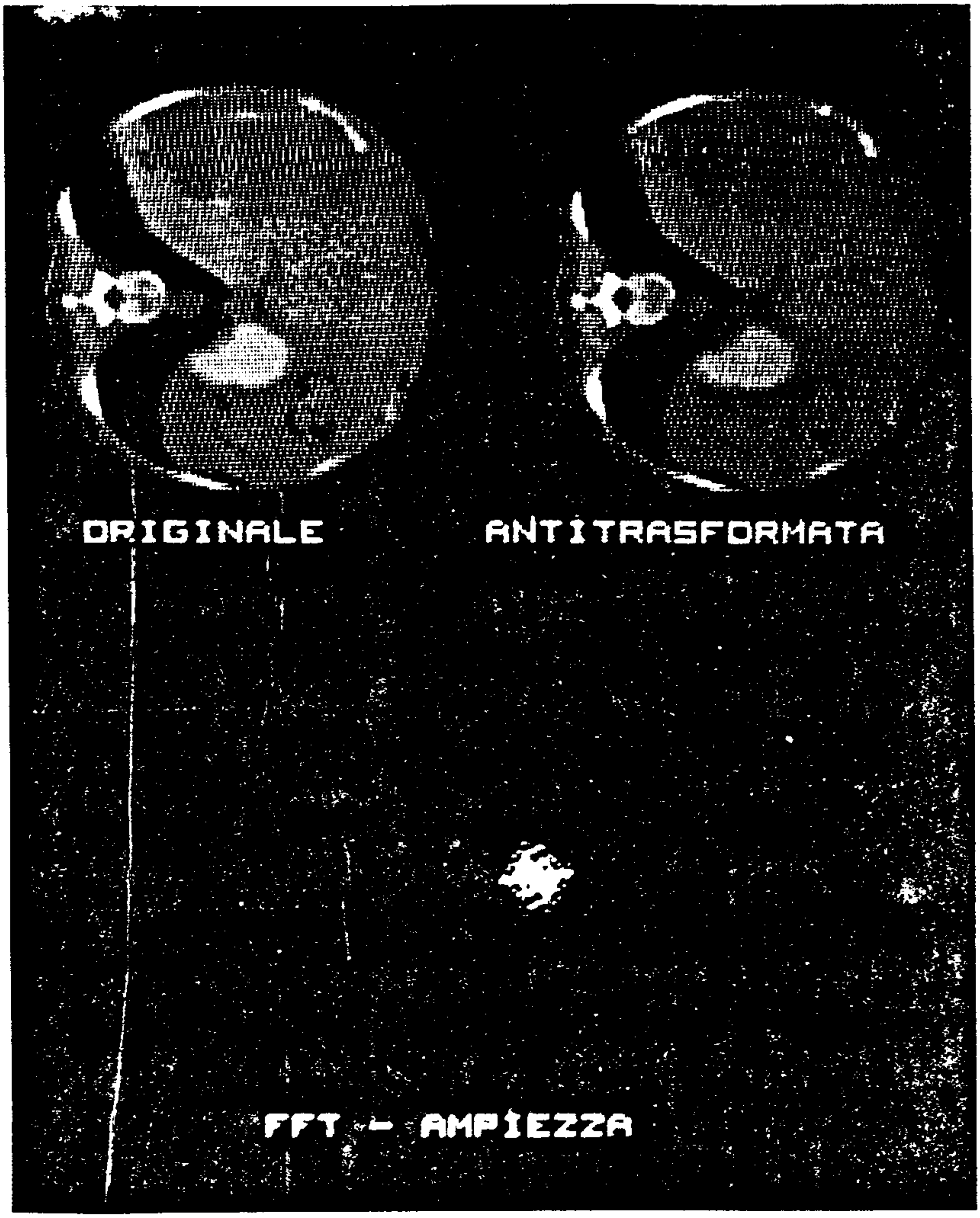
7 Esempio di applicazione della tecnica di estrazione dei contorni alla immagine di un volto: (*in alto*) immagine numerica da elaborare presentata su stampante (circa 10 livelli di grigio); (*in basso*) risultato dell'estrazione dei contorni con la regola di separazione che impiega un valore piccolo della soglia $T$.



24 Sezione tomografica superiore elaborata assieme a quella di tavola 23.

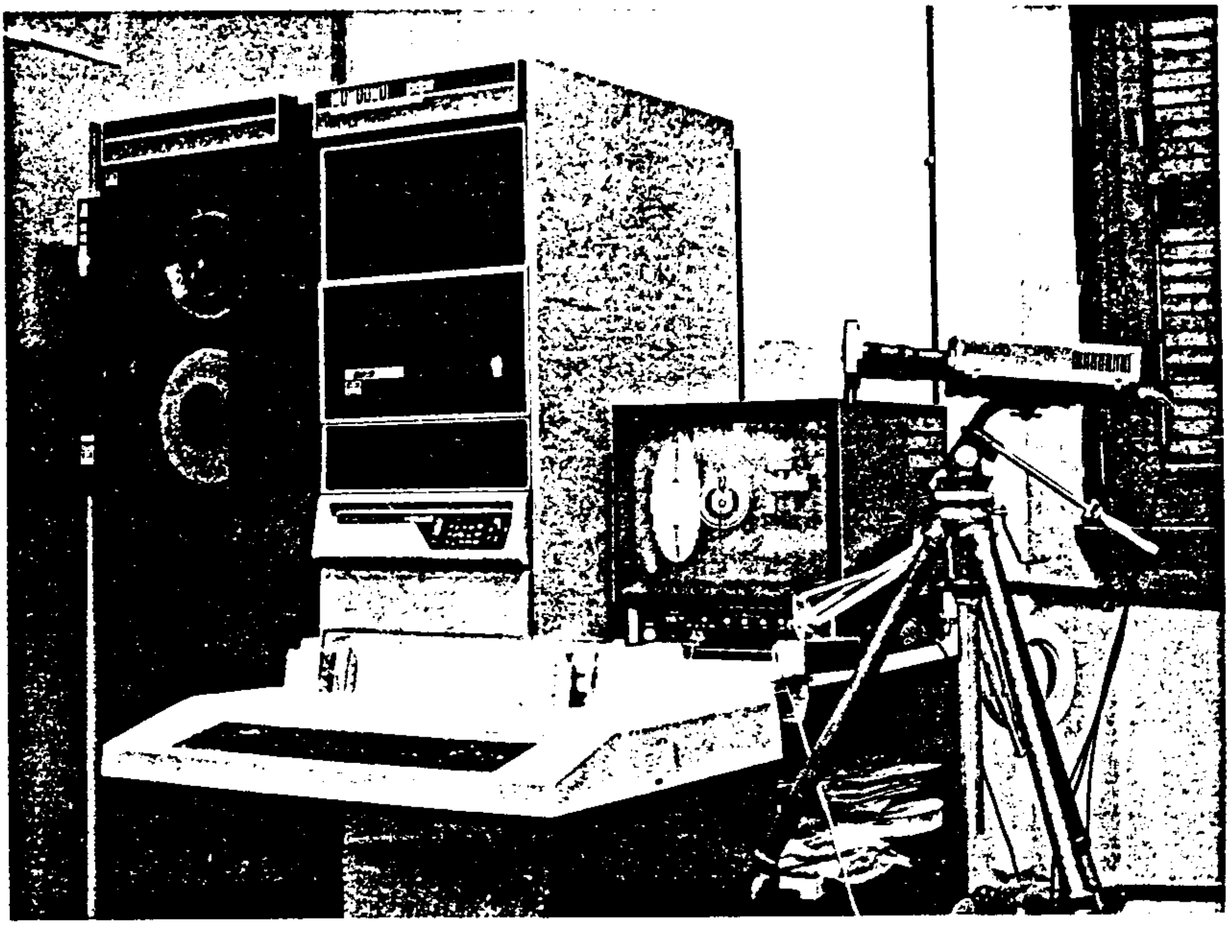



9 Risposta in frequenza completa per l'esempio di filtro numerico 2D FIR parabolico, illustrato nella tavola 8, impiegato per la ricostruzione di immagini sfuocate. La funzione finestra di Cappellini impiega funzioni di Weber.

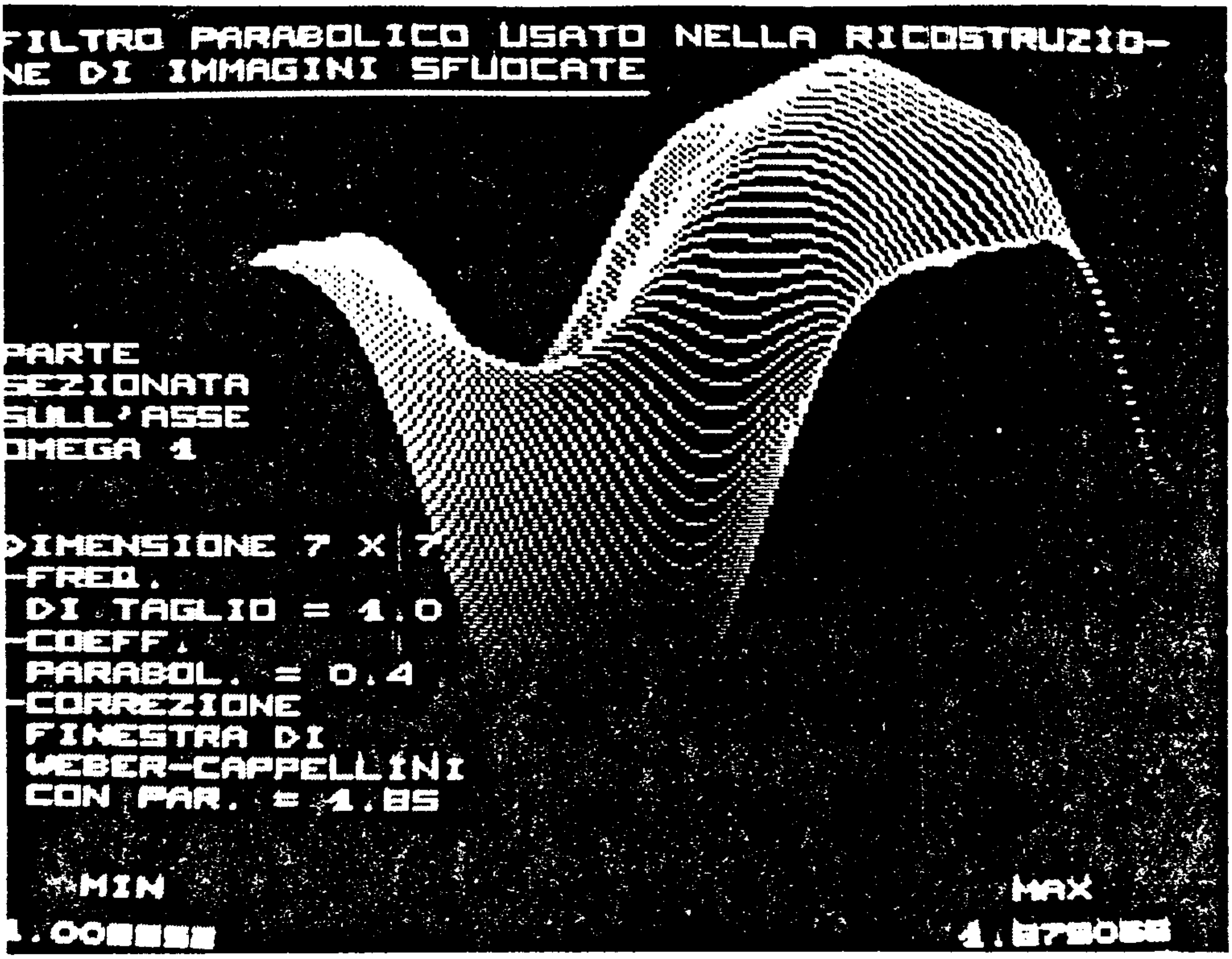



6 Esempio di applicazione della trasformata FFT 2D a un'immagine tomografica per riduzione dei dati: l'immagine originale (*in alto a sinistra*) è confrontata con la FFT 2D di cui si danno i valori significativi dell'ampiezza. L'immagine ricostruita (*in alto a destra*) è l'antitrasformata ottenuta utilizzando i valori di ampiezza e fase della FFT 2D superiori a 5‰.

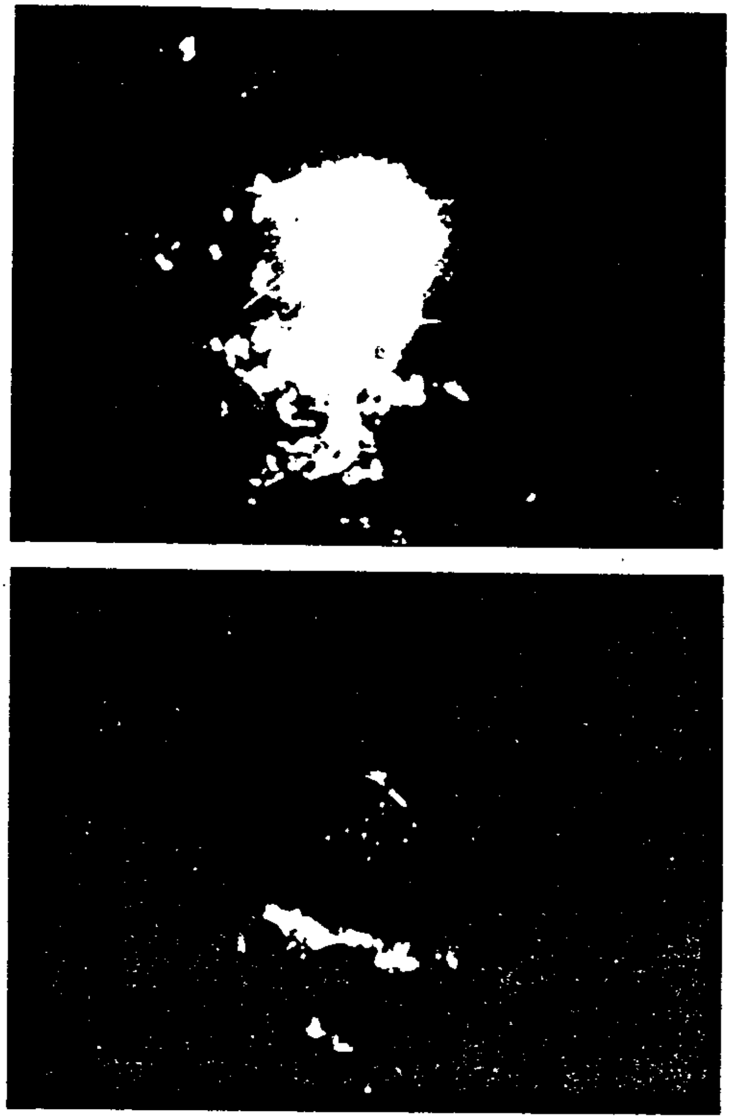
11A Configurazione operativa di sistema S-1 per elaborazione numerica delle immagini: sul monitor TV si vede il livello di grigio della linea verticale bianca acquisita.



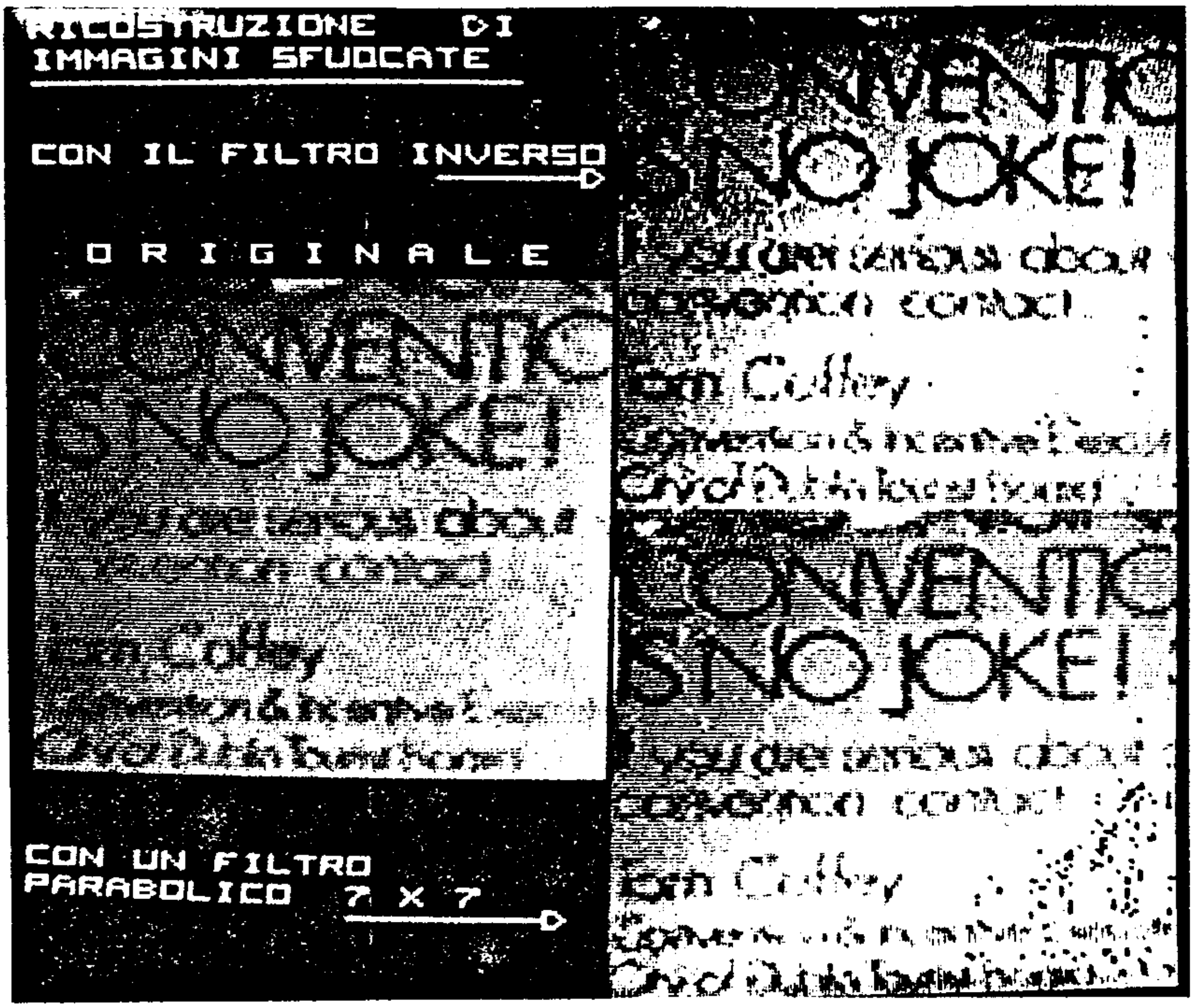
11B Configurazione operativa di sistema S-2.



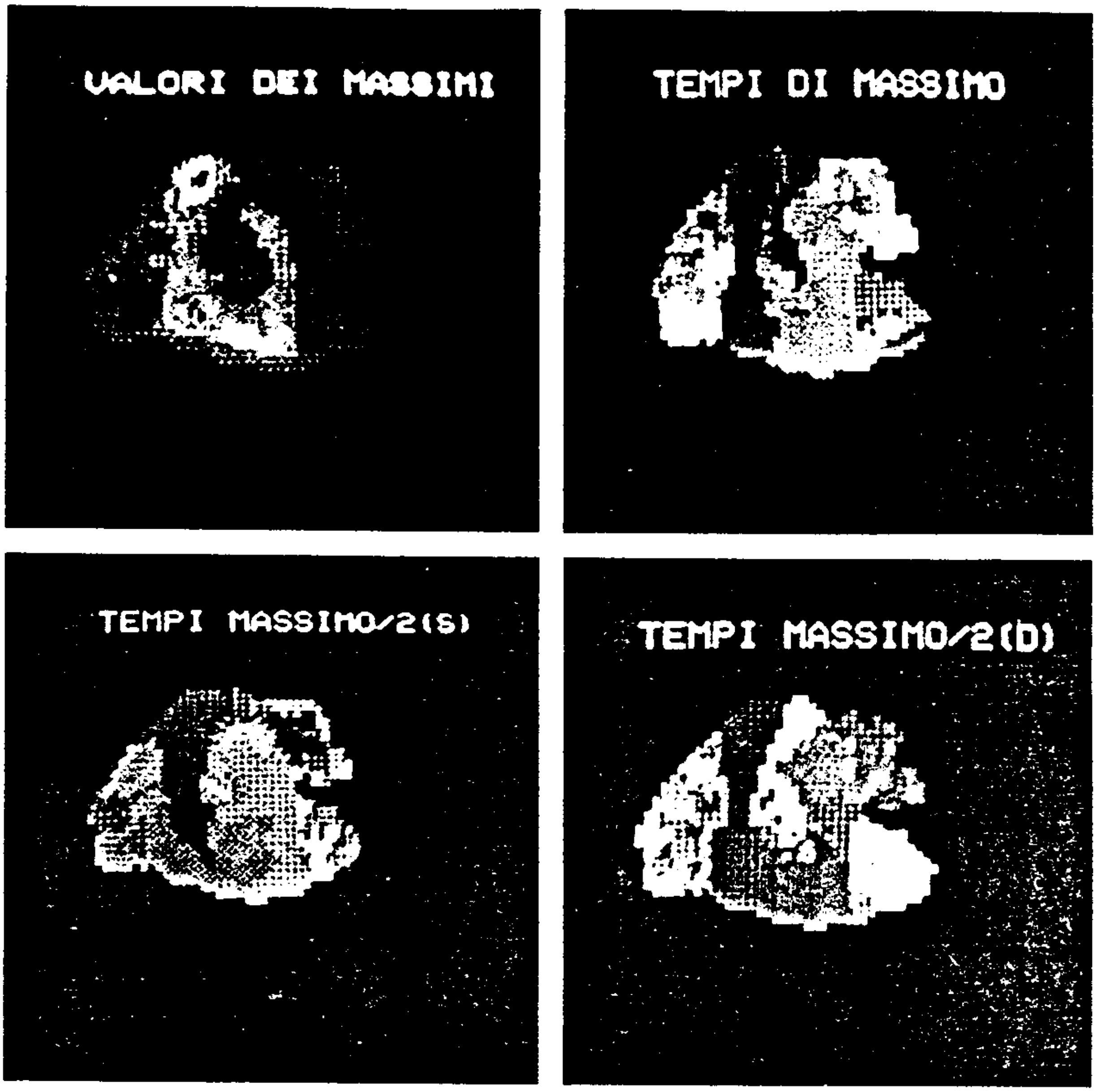

8 Esempio di filtro numerico 2D FIR parabolico, con funzione finestra di Cappellini con parametro 1,85. Il coefficiente della parabola è $a = 0{,}4$, la frequenza di taglio 1 e il numero dei coefficienti è $7 \cdot 7$. È riportata parte della risposta in frequenza.



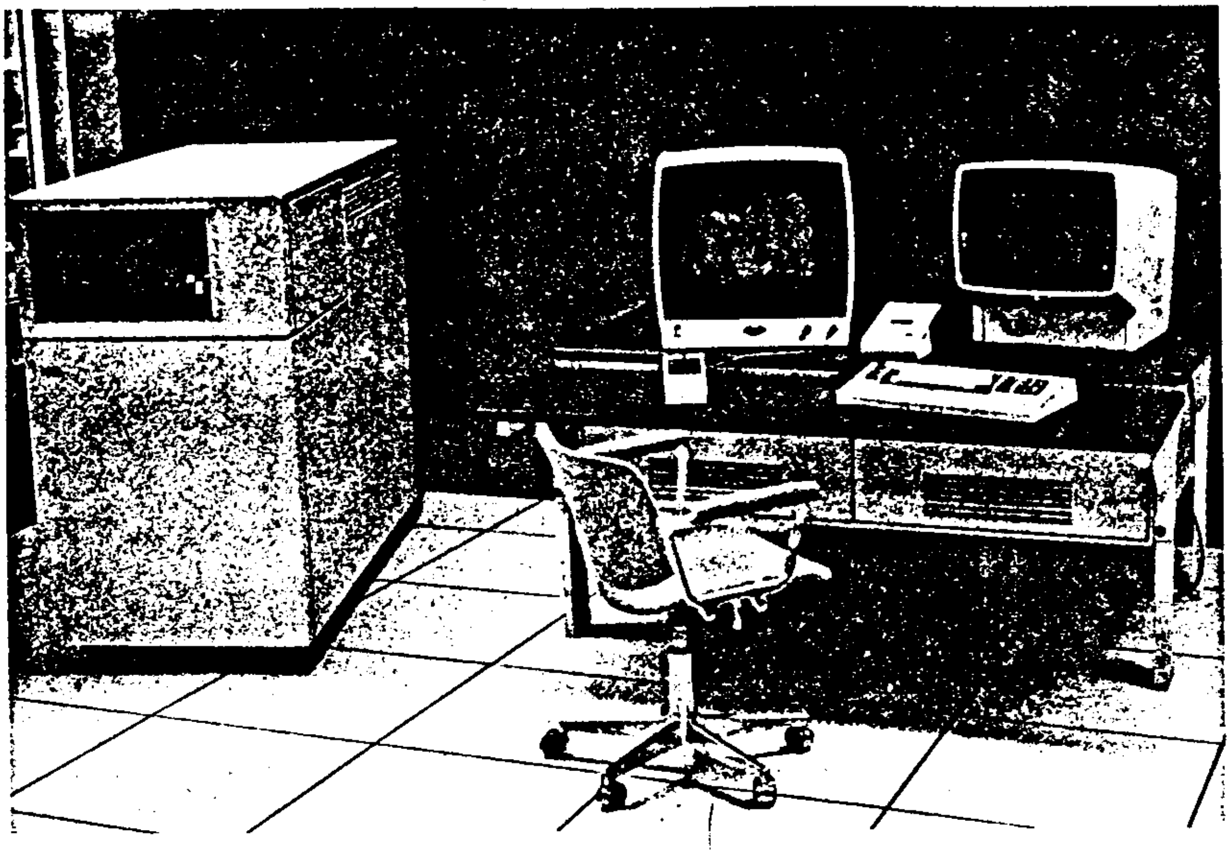
13 Esempio di applicazione di filtro MTI del secondo ordine FIR con dispositivi CTD: (*in alto*) mappa al display di zona vicino a Firenze senza l'uso del filtro; (*in basso*) mappa ottenuta mediante filtro MTI con dispositivo a trasferimento di carica.



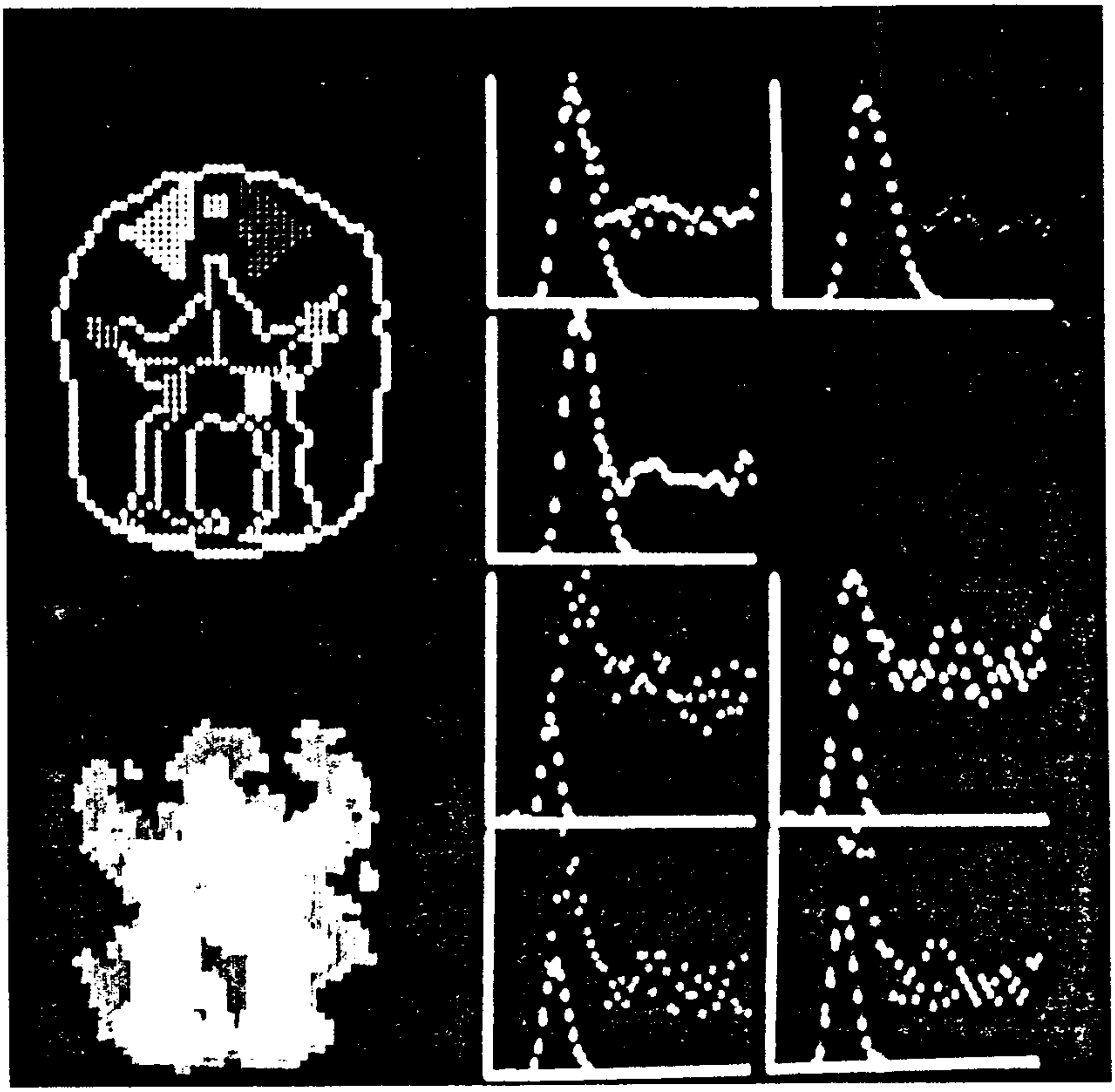

10 Esempio di applicazione di un filtro inverso per sfuocamento (coefficienti in tab. 9.3), per un confronto con il filtro parabolico di tavola 9 (coefficienti in tab. 9.2), su un'immagine sfuocata con parole in inglese.



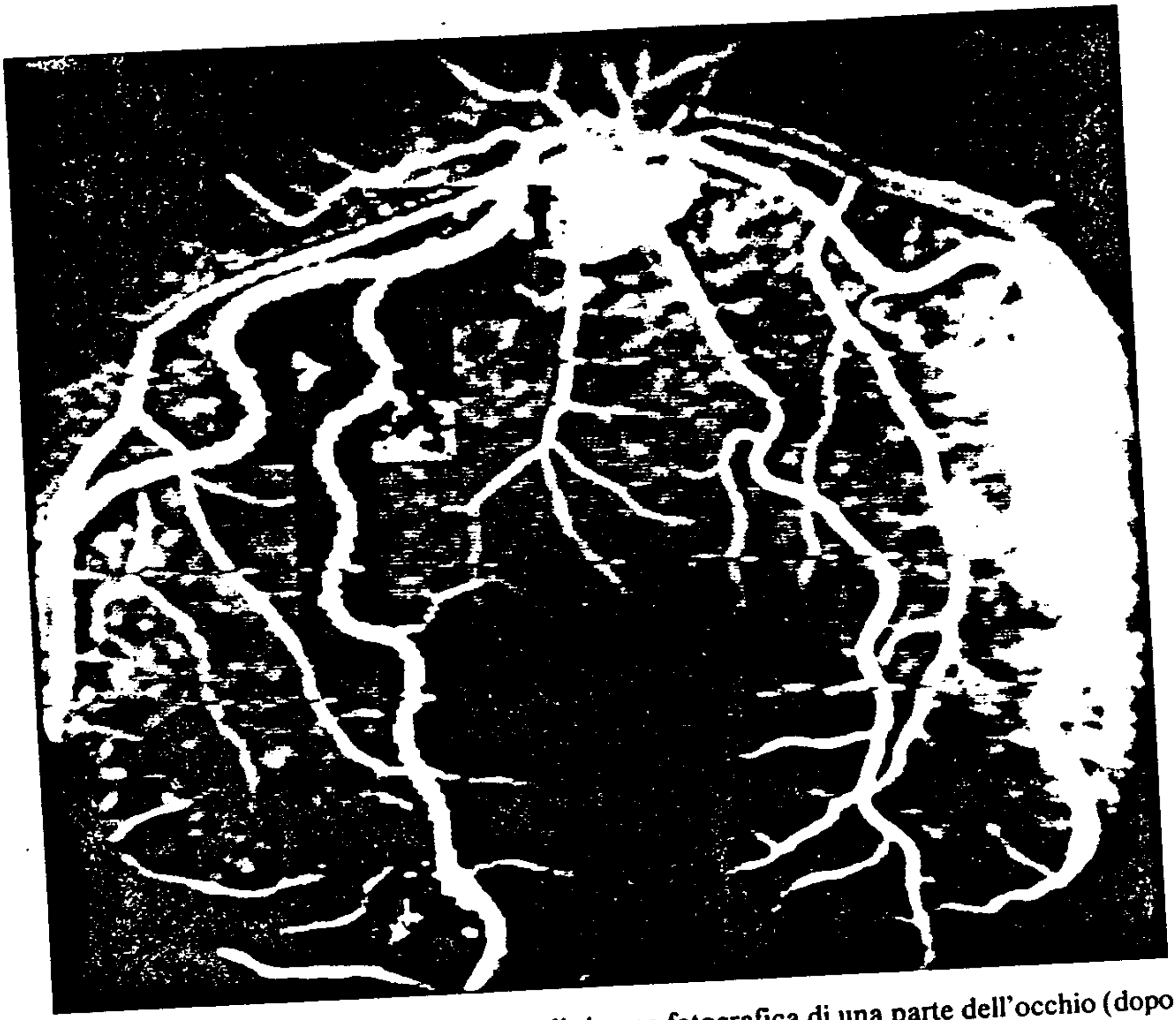

15 Esempio di elaborazione parametrica su una serie di immagini scintigrafiche della zona cardiaca: (*in alto a sinistra*) ampiezze (valori dei massimi); (*in alto a destra*) tempo in cui si raggiunge il massimo (tempi di massimo); (*in basso a sinistra*) tempo in cui si arriva al valore metà del massimo in salita (tempo di massimo/2 (S)); (*in basso a destra*) tempo in cui si scende al valore metà del massimo (tempi di massimo/2 (D)).



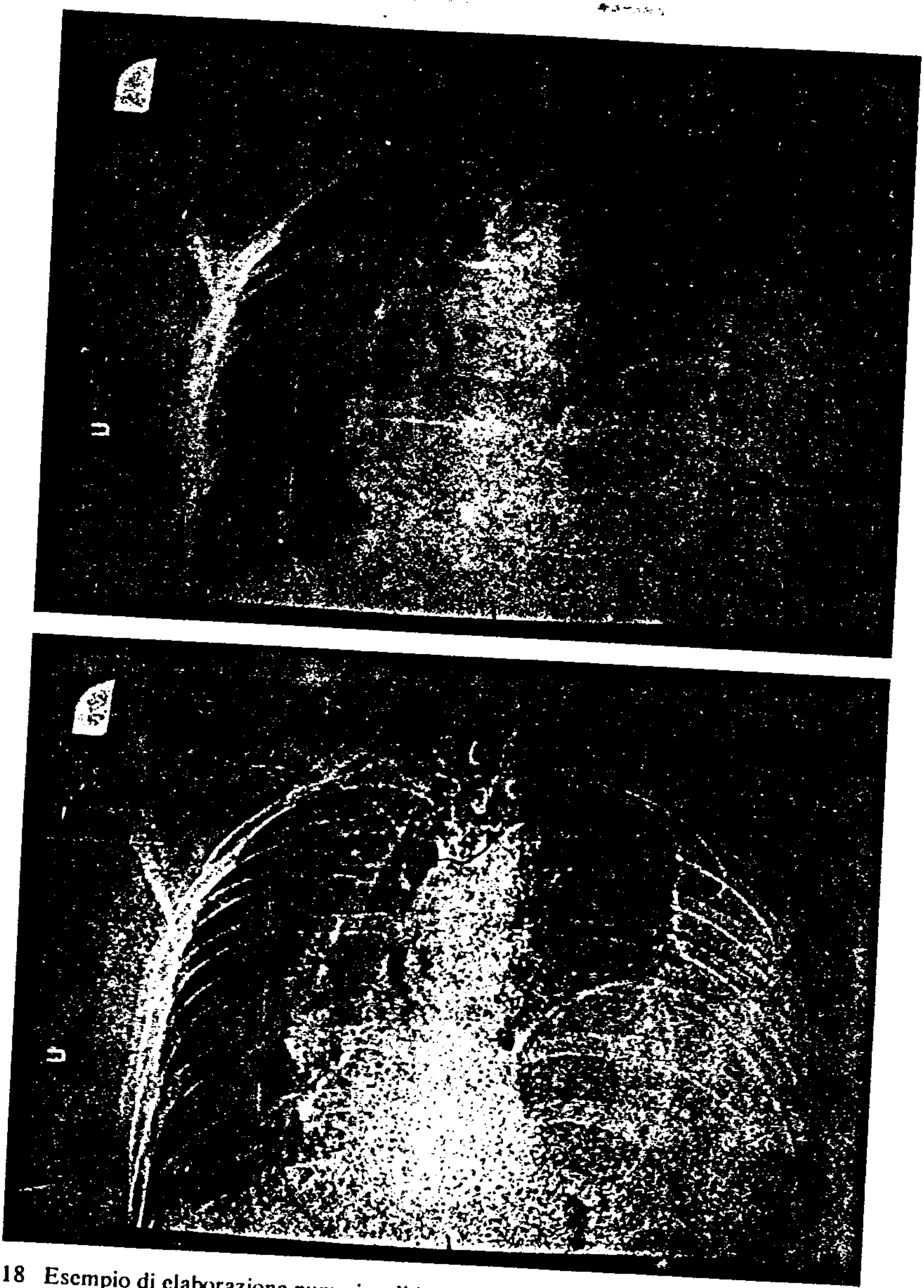
12 Sistema S-4 di elaborazione numerica delle immagini (IBM 7350): comprende l'unità di controllo e il tavolo di lavoro con i due video, uno per le immagini, uno per il colloquio dell'utente con il sistema principale.



17 Esempio di elaborazione automatica di sequenze di immagini angio-cerebrali con rilevamento delle strutture e dei vasi, e con gli istogrammi dei conteggi effettuati per le varie aree cerebrali.

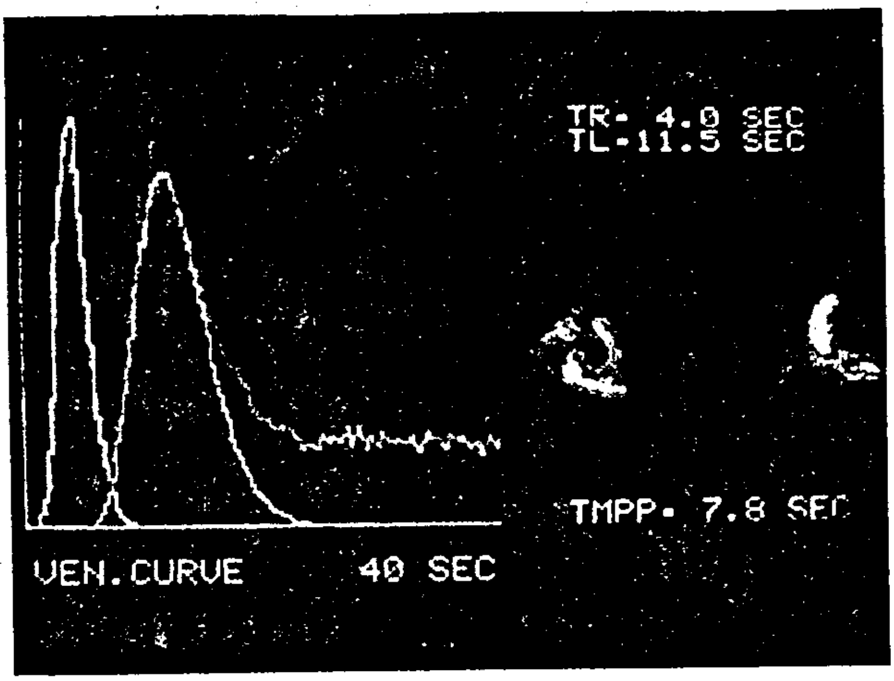


14 Esempio di elaborazione numerica di ripresa fotografica di una parte dell'occhio (dopo iniezione di fluoroscеina).

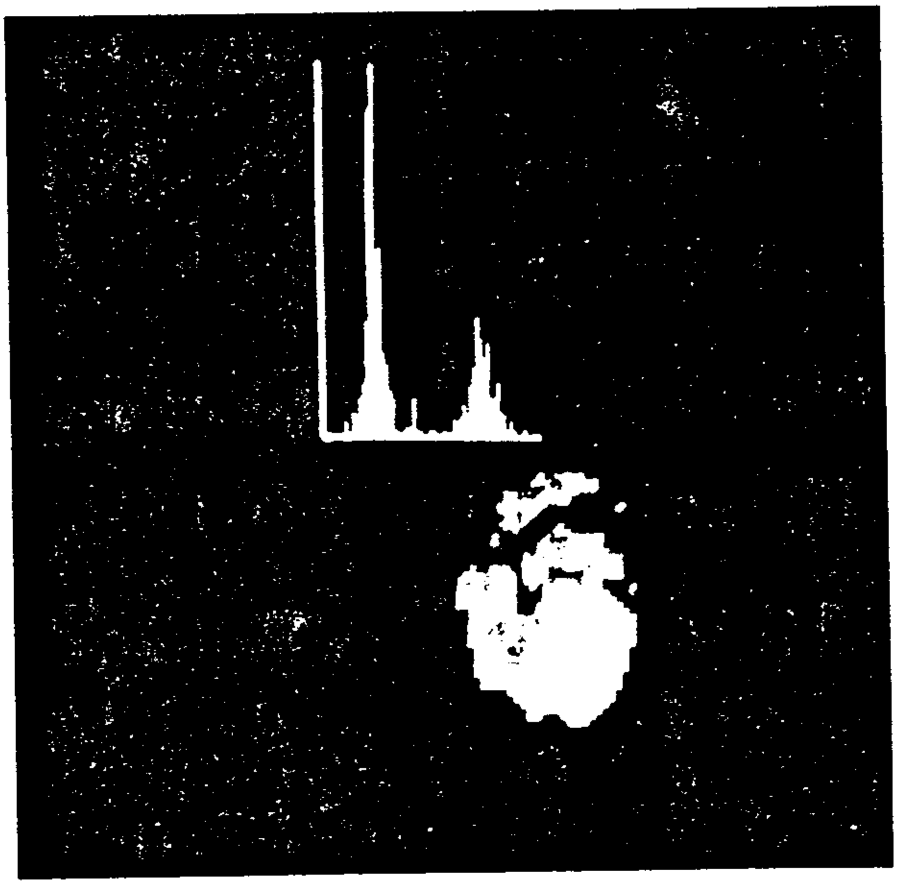


18 Esempio di elaborazione numerica di immagine radiografica mediante applicazione di un filtro numerico 2D IIR del tipo passa-banda: (*in alto*) immagine originale; (*in basso*) immagine filtrata in cui sono messi in evidenza i contrasti (in particolare quelli riguardanti le costole).

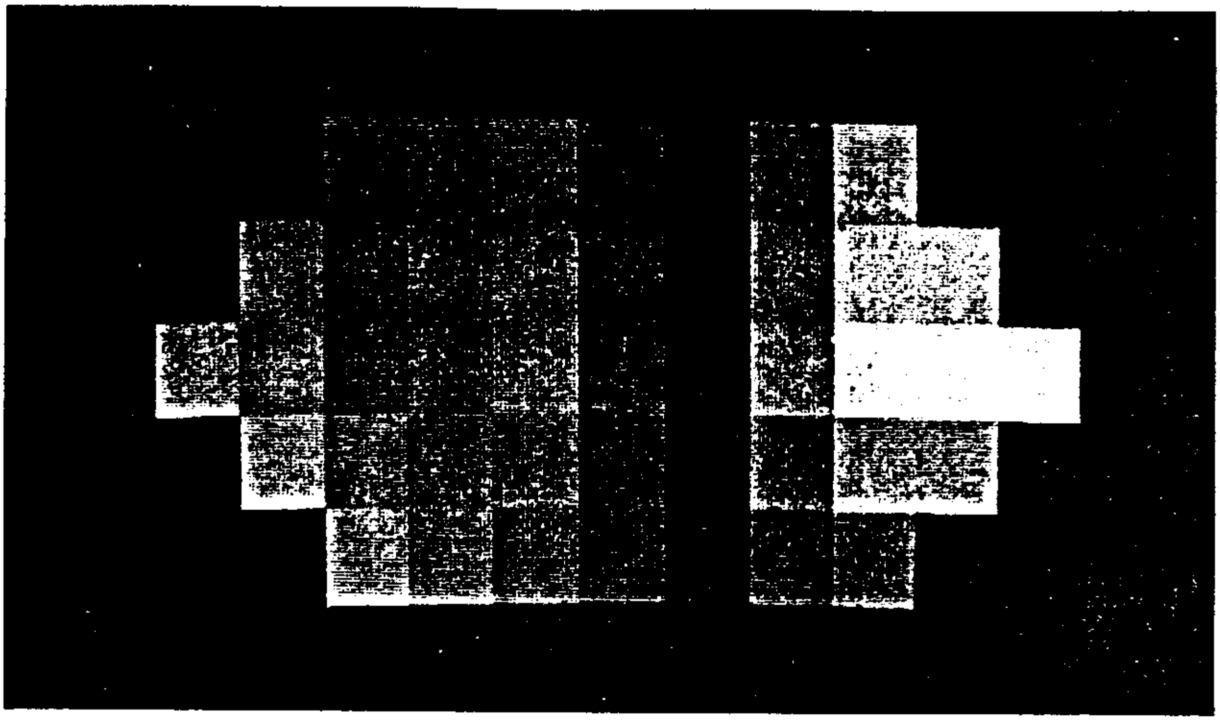
19 Esempio di elaborazione numerica di radiografia a raggi X in più fasi, con iniezione di un mezzo di contrasto.

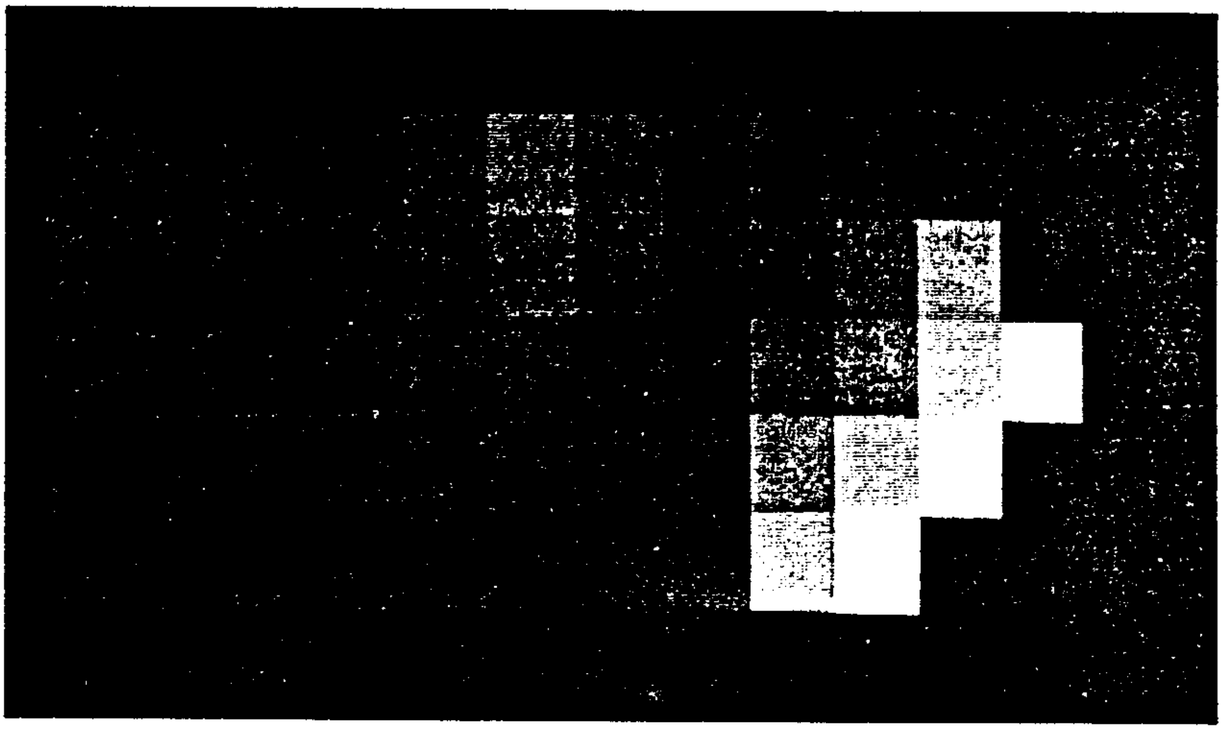



16A Esempio di analisi automatica del primo transito del tracciante in un esame del cuore, con determinazione del tempo medio di passaggio polmonare (TMPP).

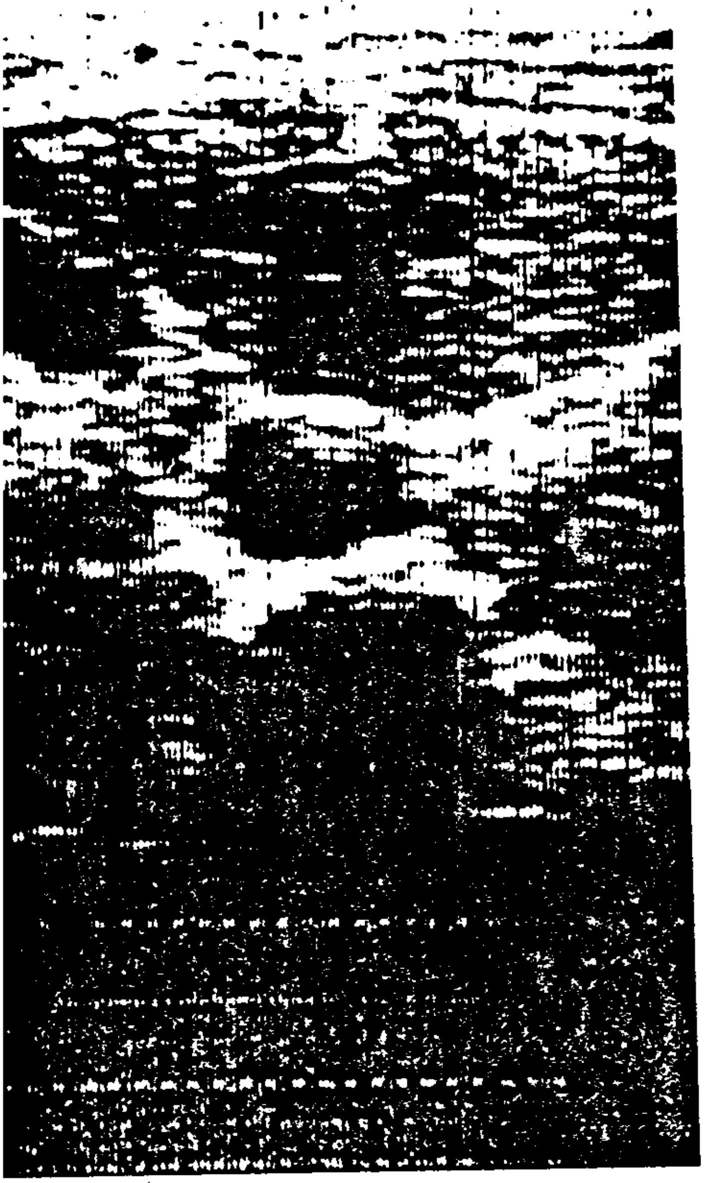


16B Esempio di analisi di Fourier con distribuzione delle fasi della prima armonica (*in basso*) e istogramma della distribuzione degli angoli di fase (*in alto*).

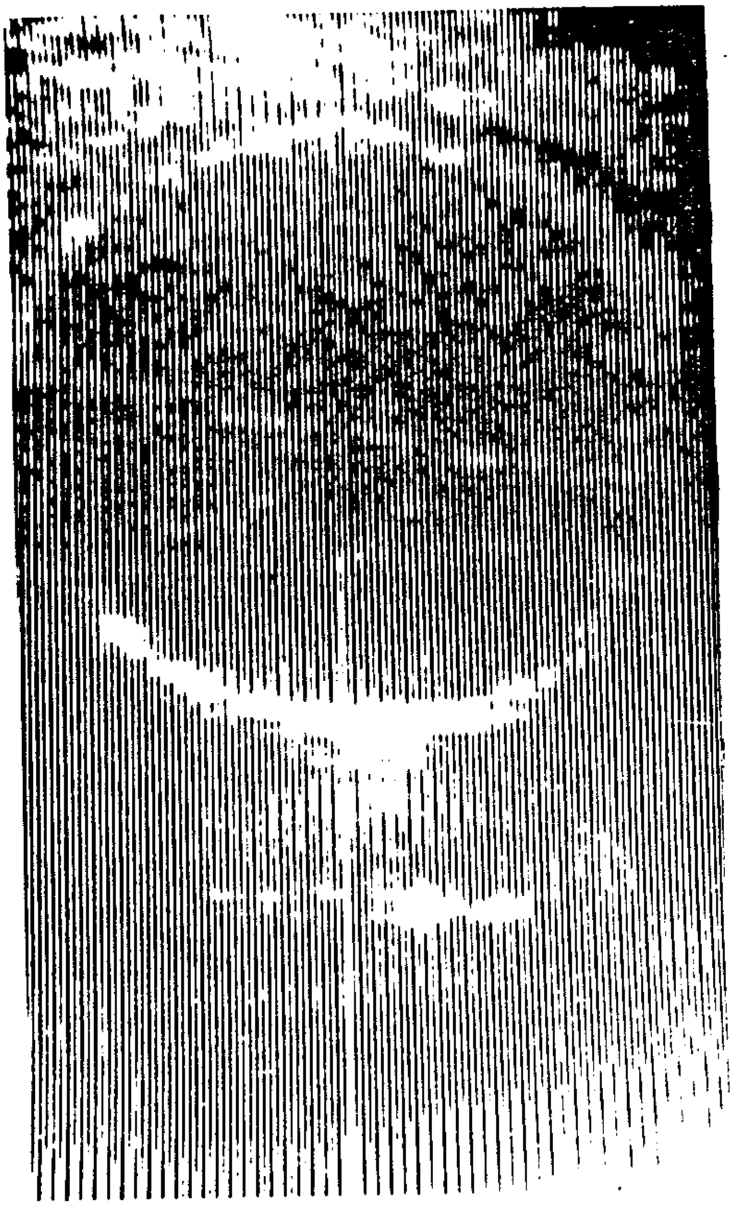




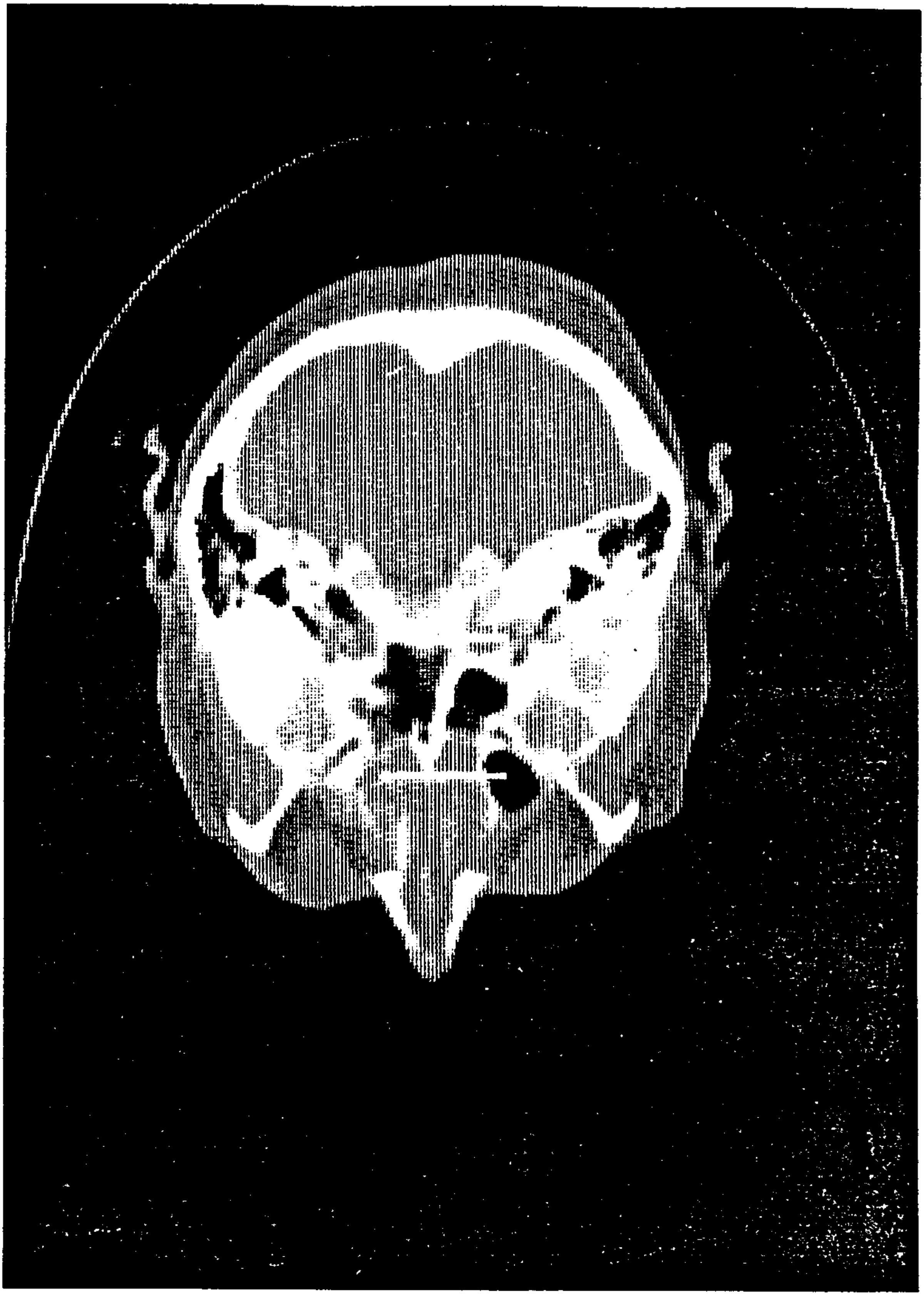
21 Esempi di mappe di potenziali elettroencefalografici acquisiti fuori linea ed elaborati con il sistema S2 (filtraggio per estrazione del ritmo $\alpha$).



20A Esempio di ecografia di fegato con esaltazione dei grigi (ECHO-SCAN, OTE Biomedica, Firenze).

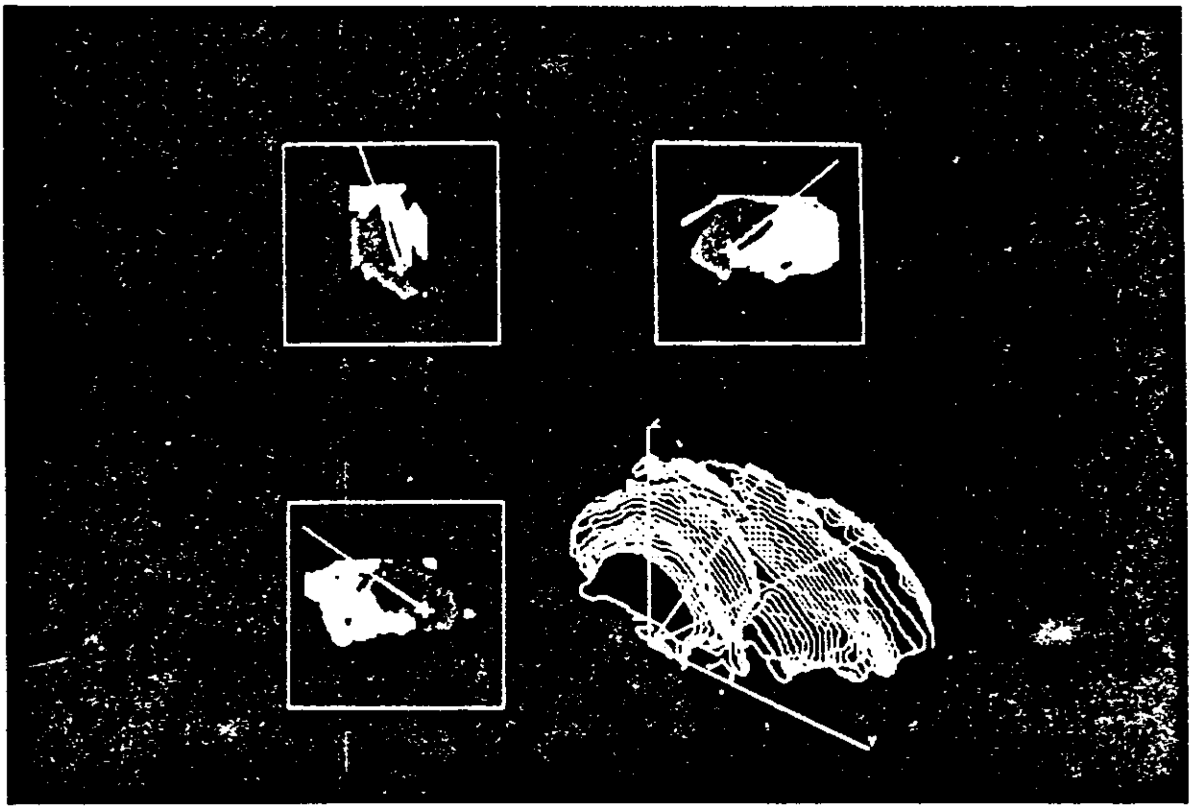


20B Esempio di ecografia di feto con elaborazione di esaltazione (ECHO-SCAN, OTE Biomedica, Firenze).

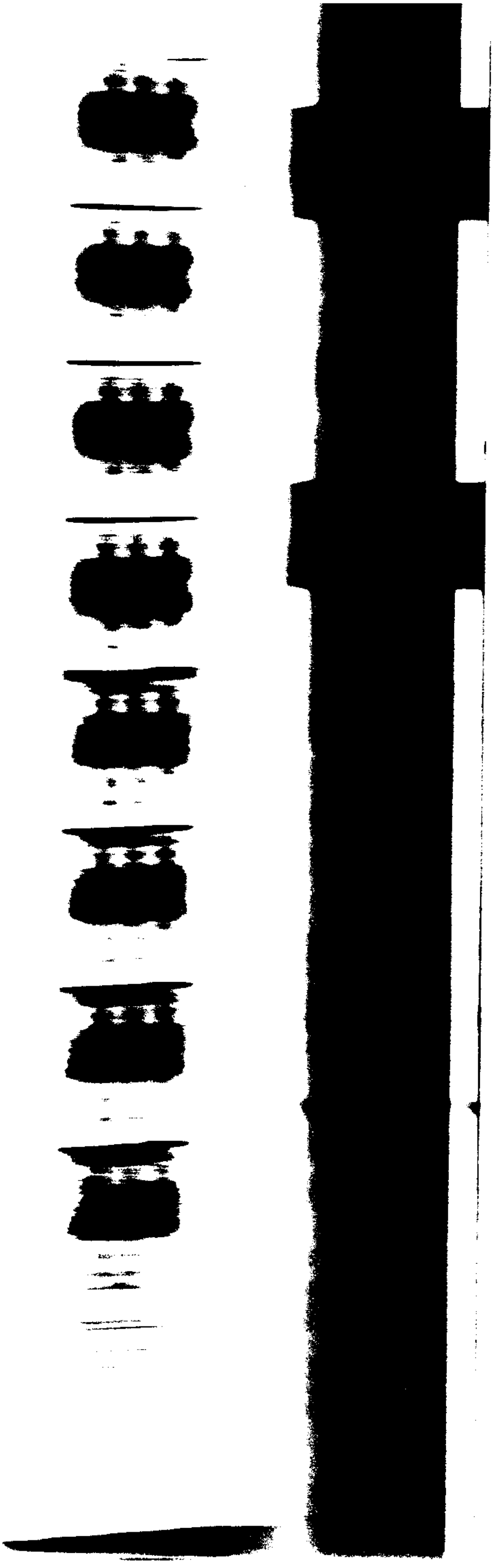


23 Esempio di interpolazione numerica 3D su sezione tomografica inferiore.

22A Esempi di immagini tomografiche (*a sinistra*) e loro elaborazione con filtro numerico spazialmente variante (*a destra*).

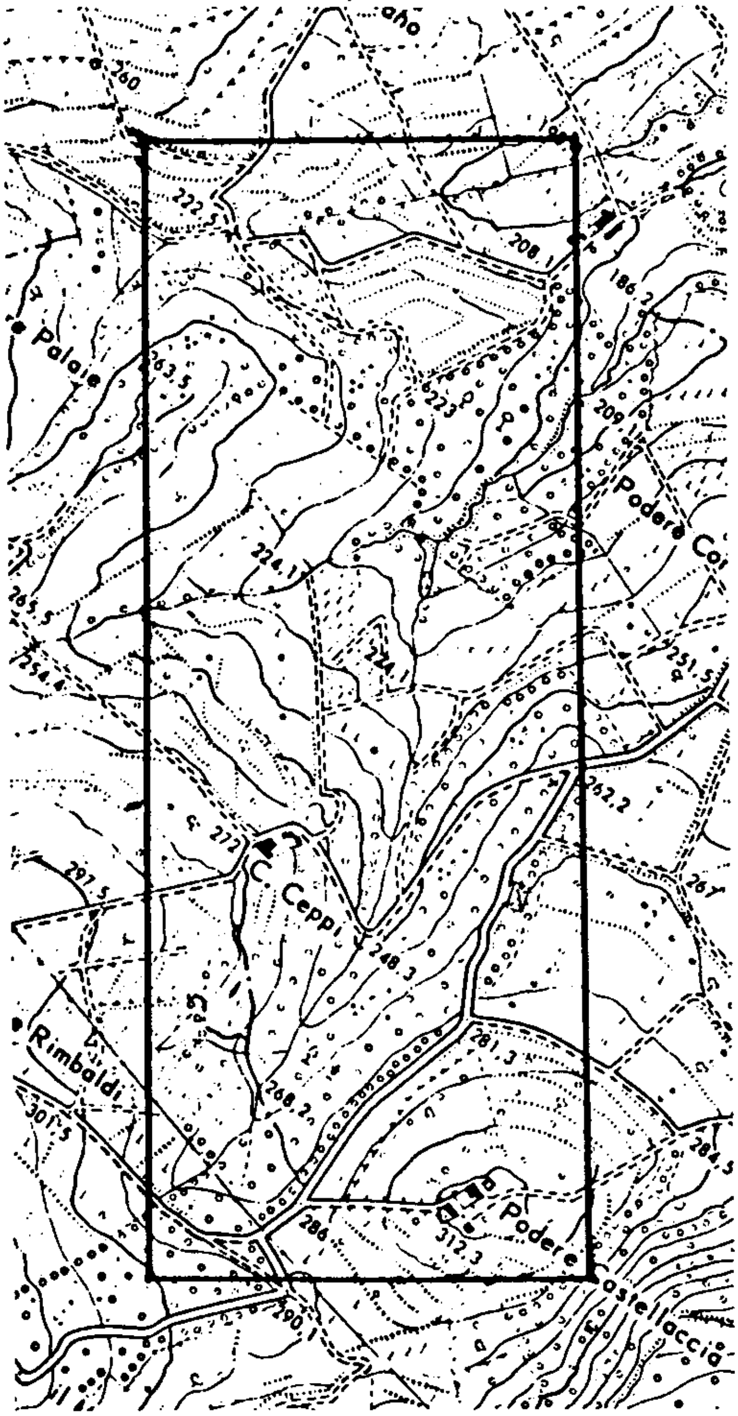


22B Esempio di analisi 3D sulla massa cerebrale.



25 Sequ
zione
tavol

26 Esempio di classificazione automatica di terreno agricolo (a sud di Firenze) mediante foto da aereo digitalizzate ed elaborate: immagine originale.

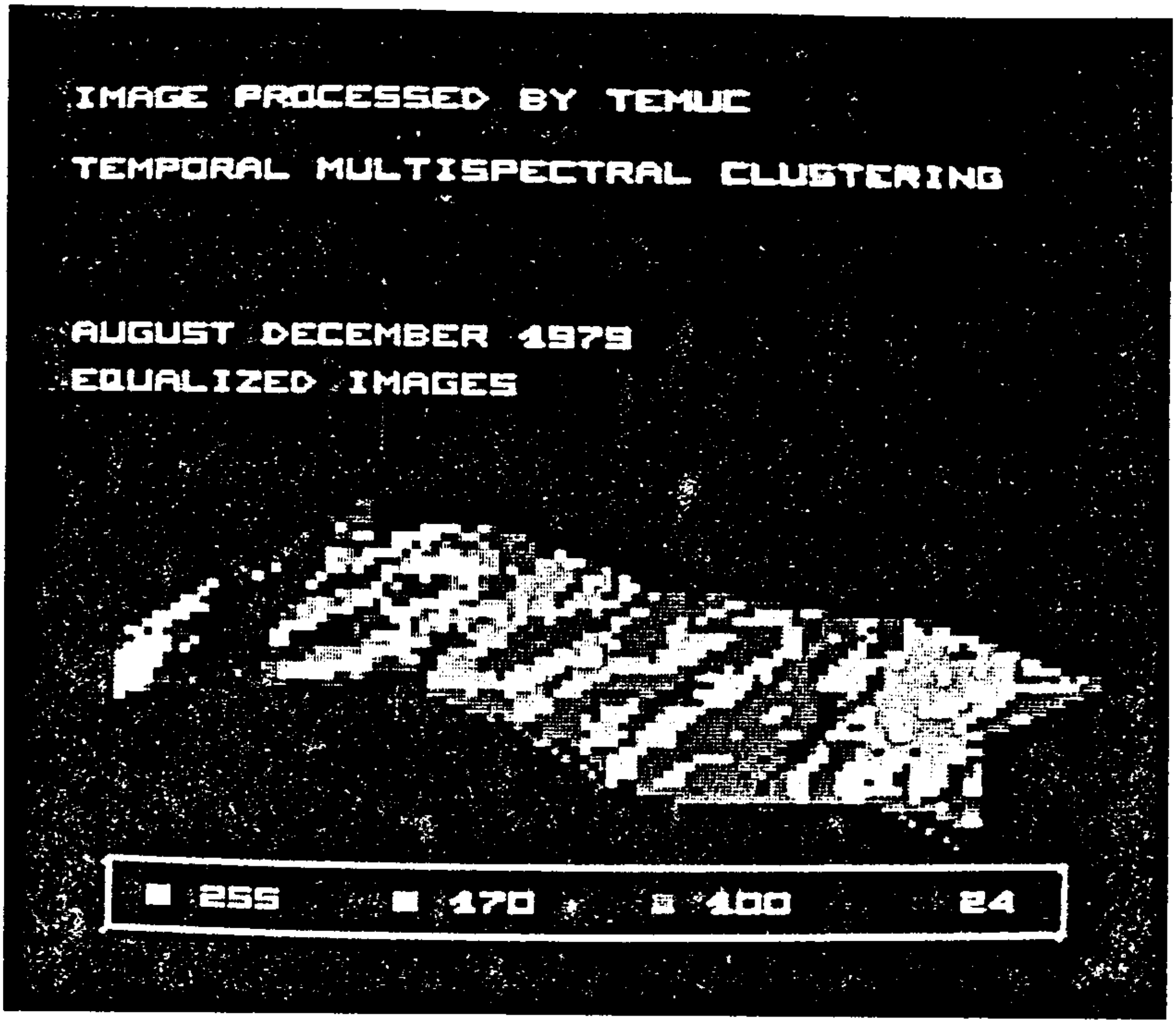



27A Carta della zona telerilevata di tavola 26.

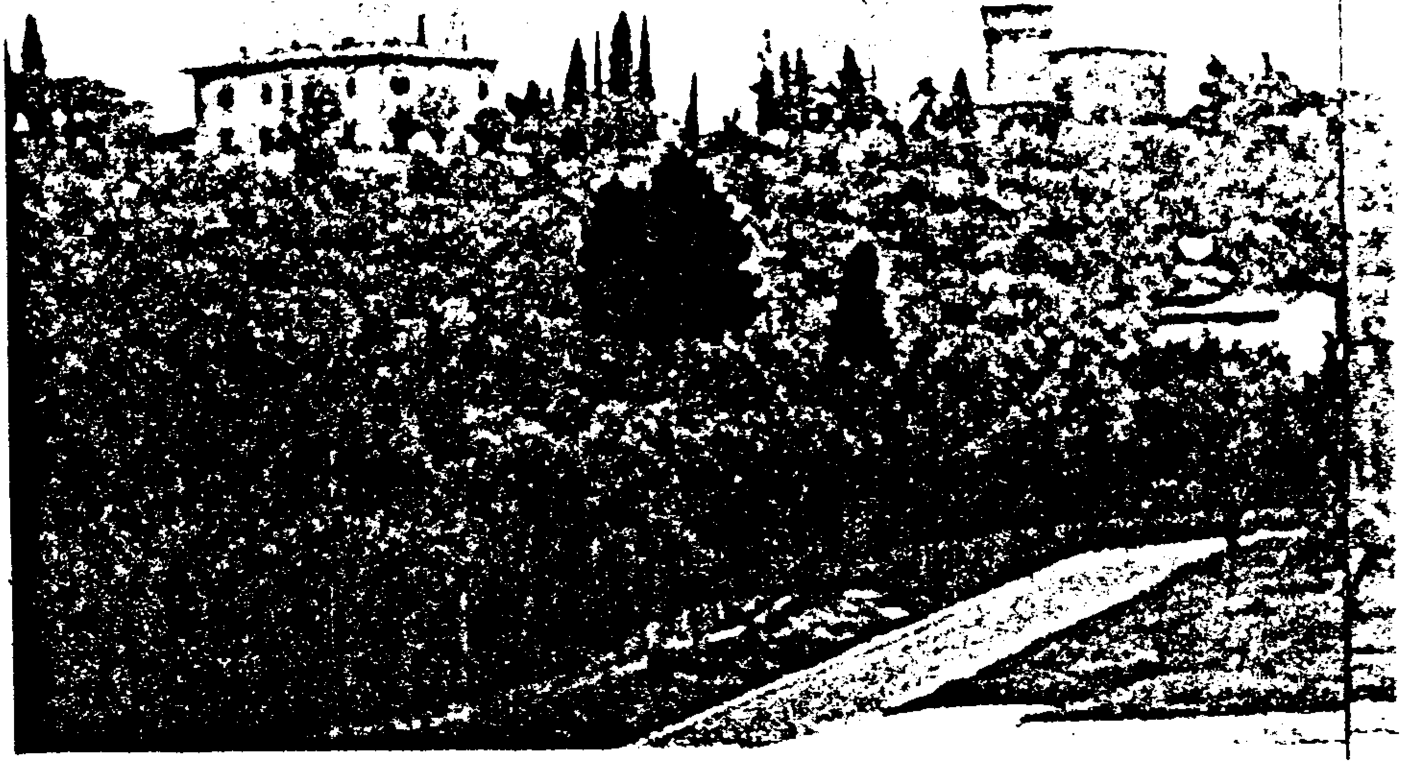
27B Estrazione dei contorni.

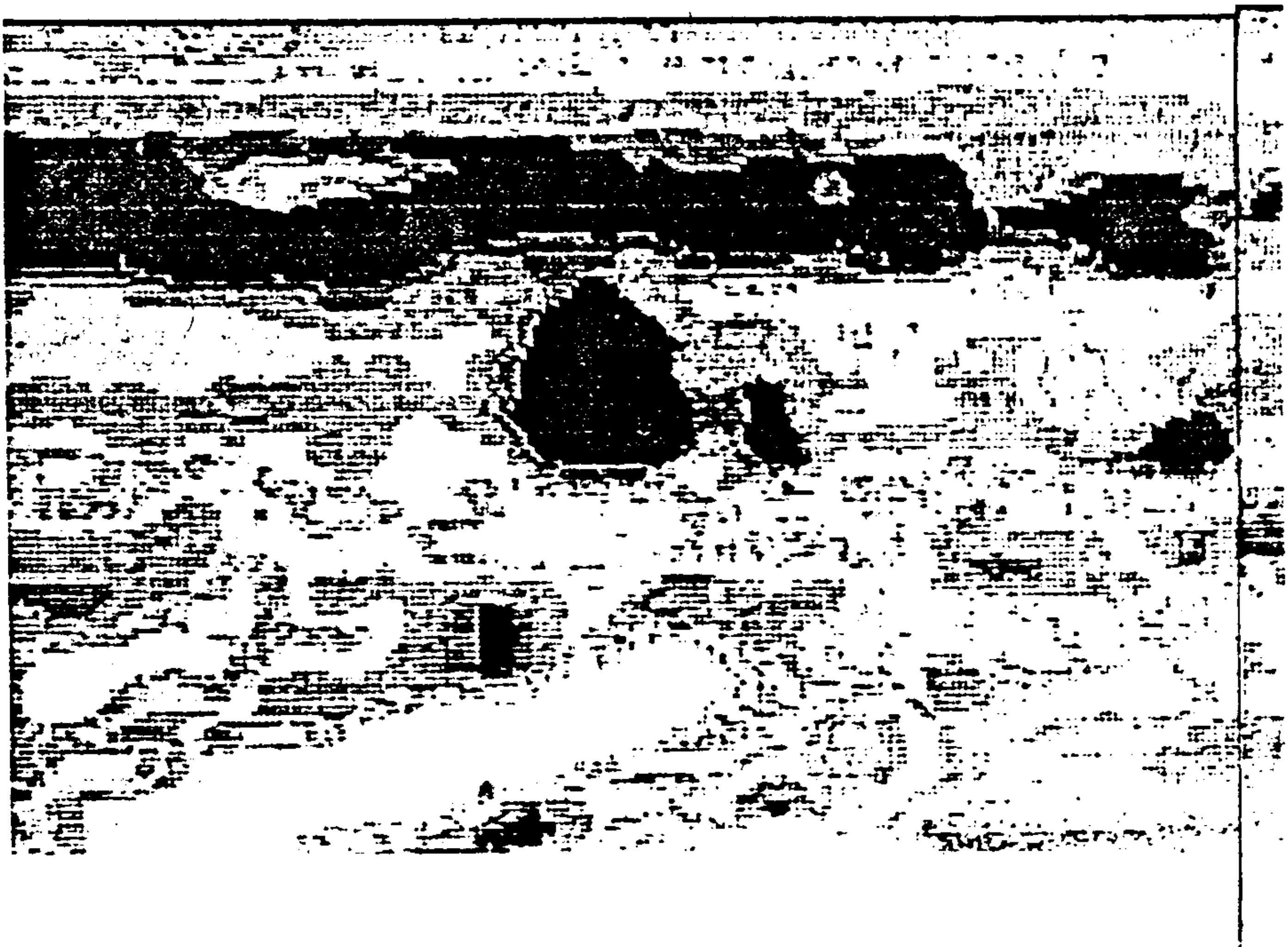
28 Classificazione delle aree di tavola 26: (*a sinistra*) aree boschive; (*al centro*) aree di vigneti-uliveti; (*a destra*) terreni con colture diverse.

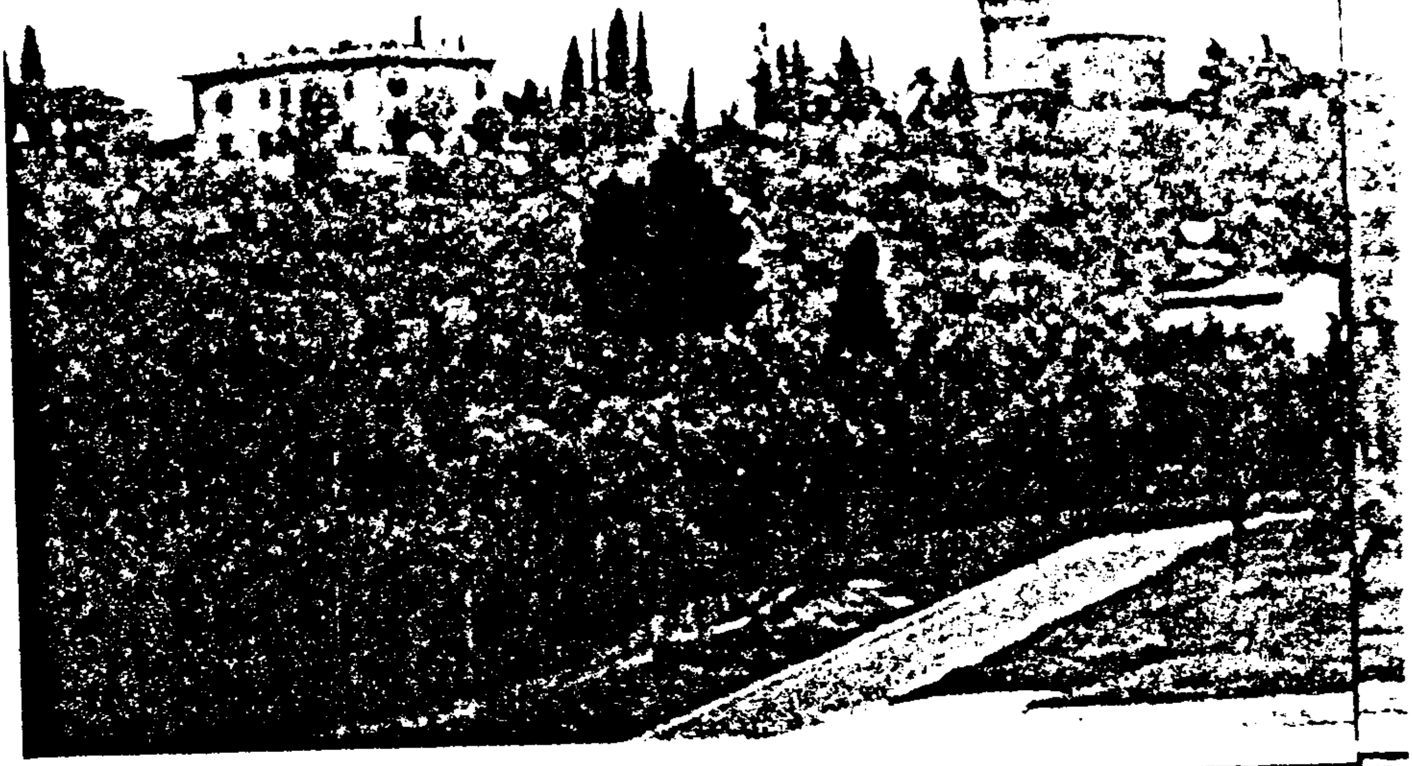
[illegible] ...azione automatica [illegible] immag[illegible] satellite [illegible]
[illegible] tecnica TE[illegible] immag[illegible] equalizza[illegible]

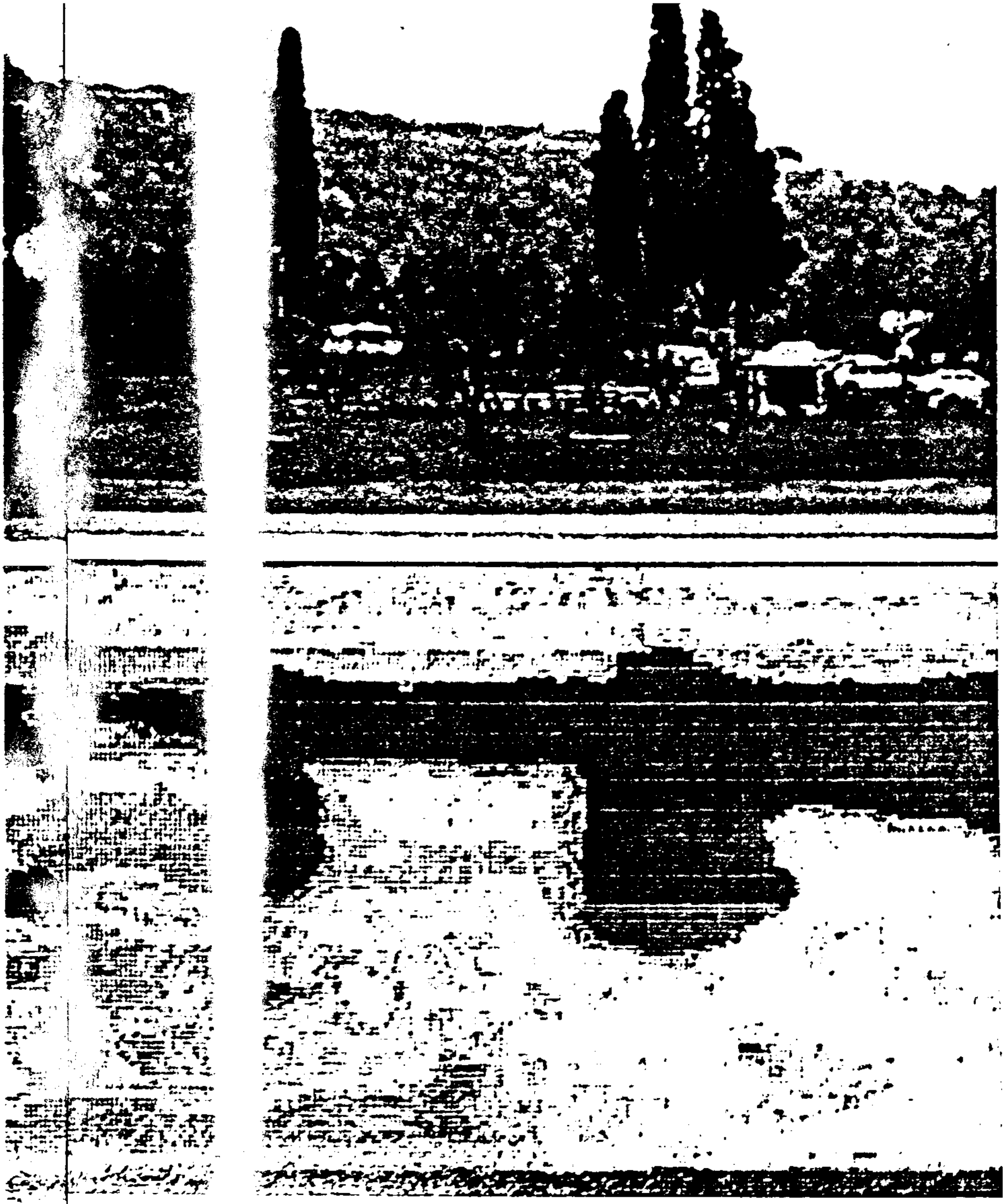



30 Risultato della classificazione da immagini LANDSAT, con tecnica TEMUC, per le zone di tavola 29: 24, abetine; 100, caducifoglie (faggeta); 170, bosco misto; 255, fossi e canali. Mappe come questa sono poi messe a confronto con i risultati di rilievi diretti effettuati a terra.



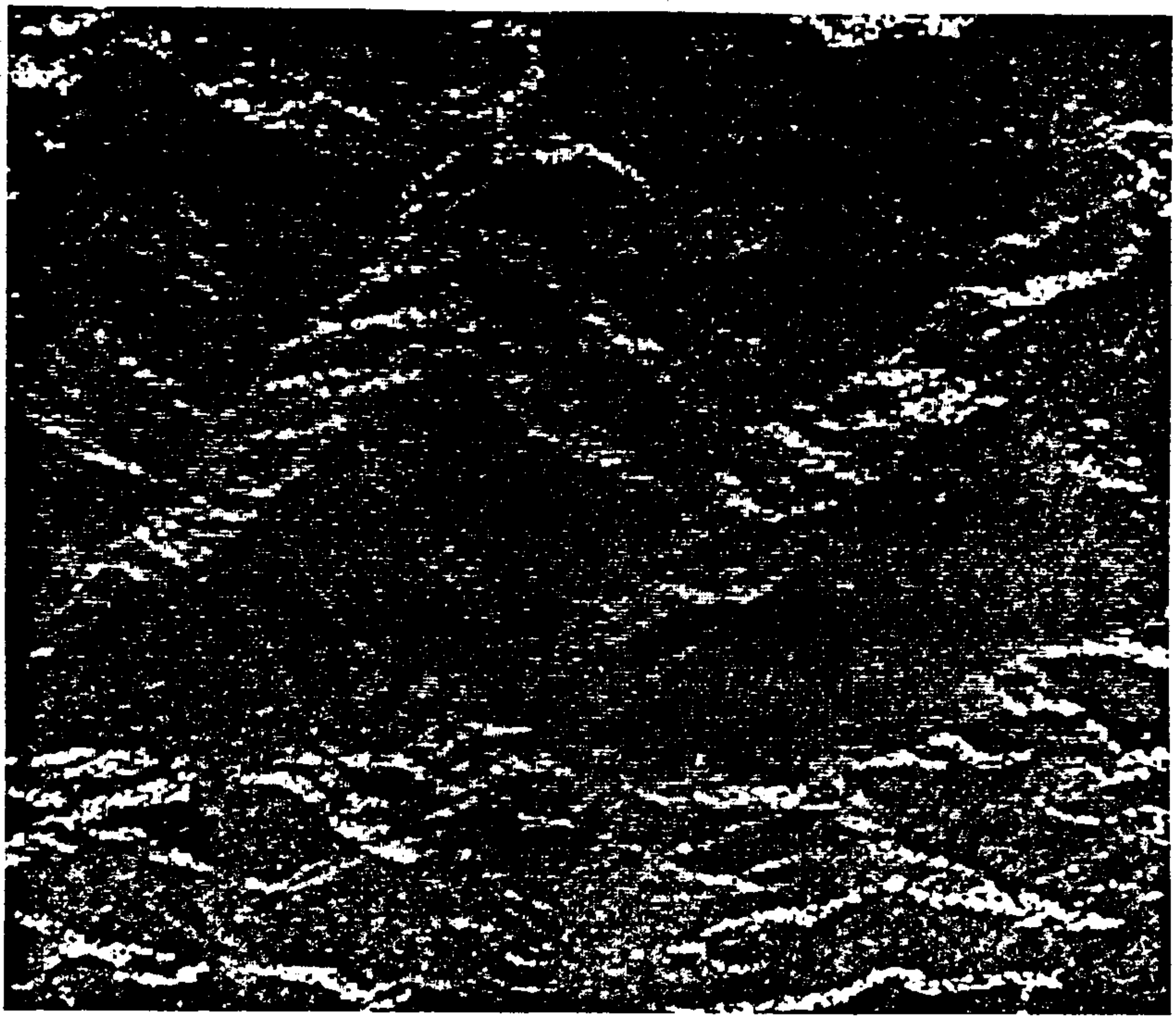






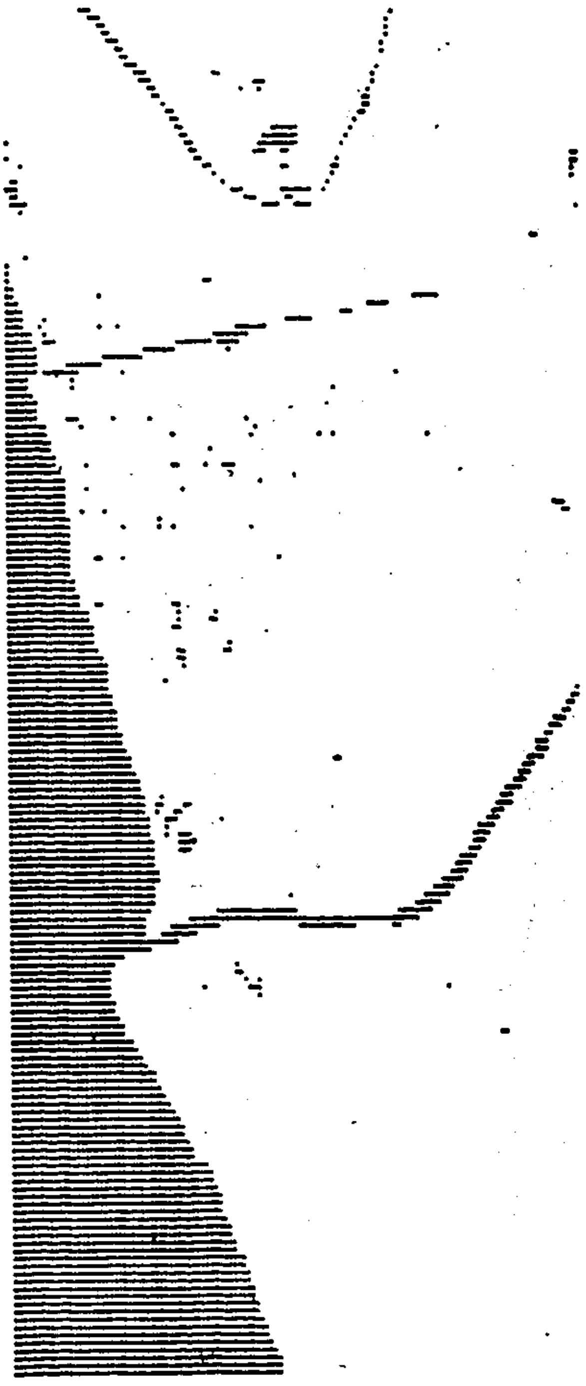
32 Ese o di rilevamento da piattaforma a terra con radiometro a microonde (SMA, Fi e); la foto del paesaggio rilevato (*in alto*) è messa a confronto con la mappa (*in ba* ottenuta mediante radiometro a microonde, con esaltazione dei contrasti.

32 Ese o di rilevamento da piattaforma a terra con radiometro a microonde (SMA, Fi e); la foto del paesaggio rilevato (*in alto*) è messa a confronto con la mappa (*in ba* ottenuta mediante radiometro a microonde, con esaltazione dei contrasti.



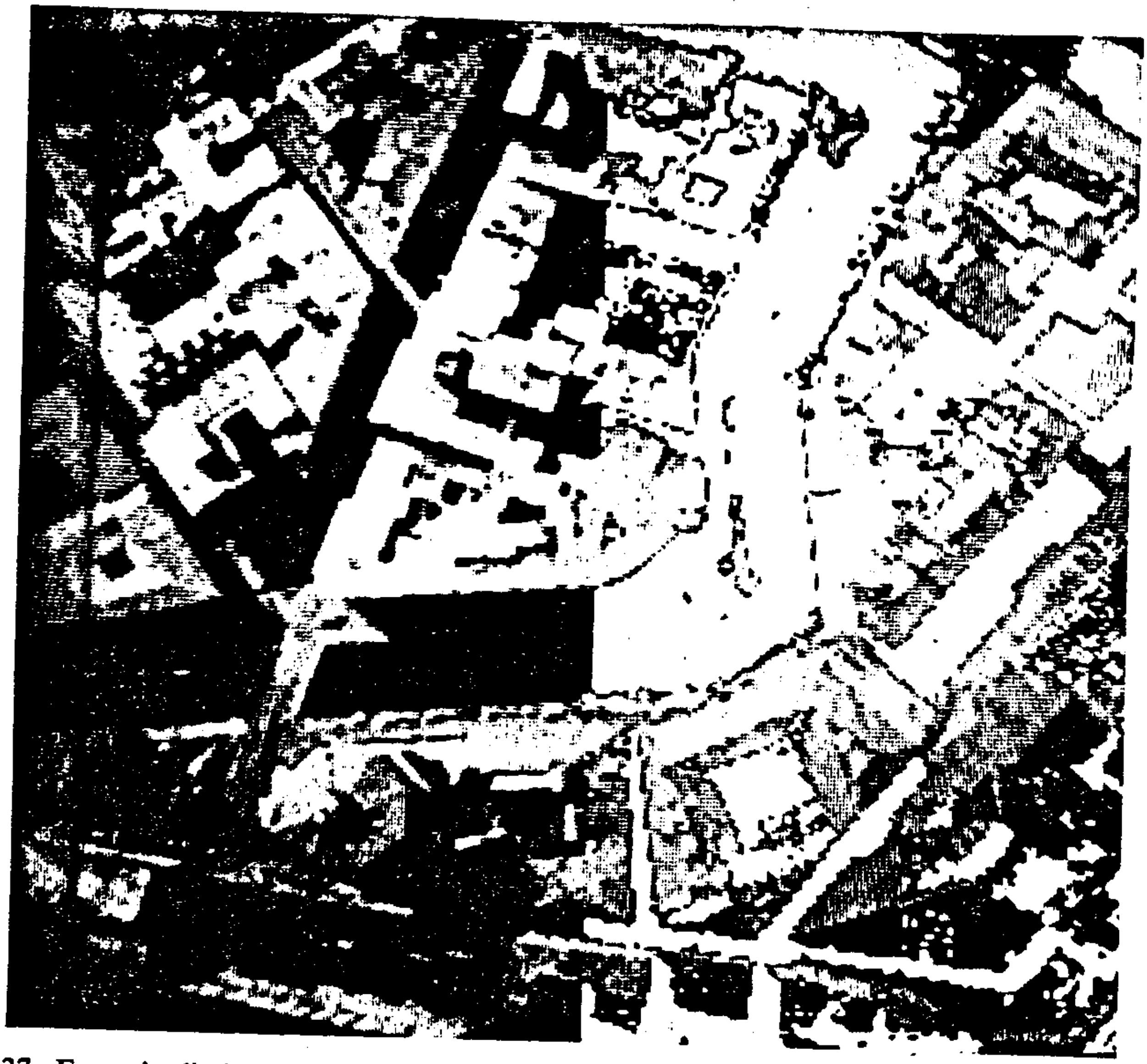
34 Mappa ottenuta con radar a visione laterale (ripresa effettuata da satellite SEASAT), relativa a una zona montuosa della Calabria. La presentazione è in falso colore, con esaltazione dei contrasti.

35 A Esempio di valutazione del grado relativo di umidità in una zona sulla costa tirrenica vicino alla foce dell'Arno.

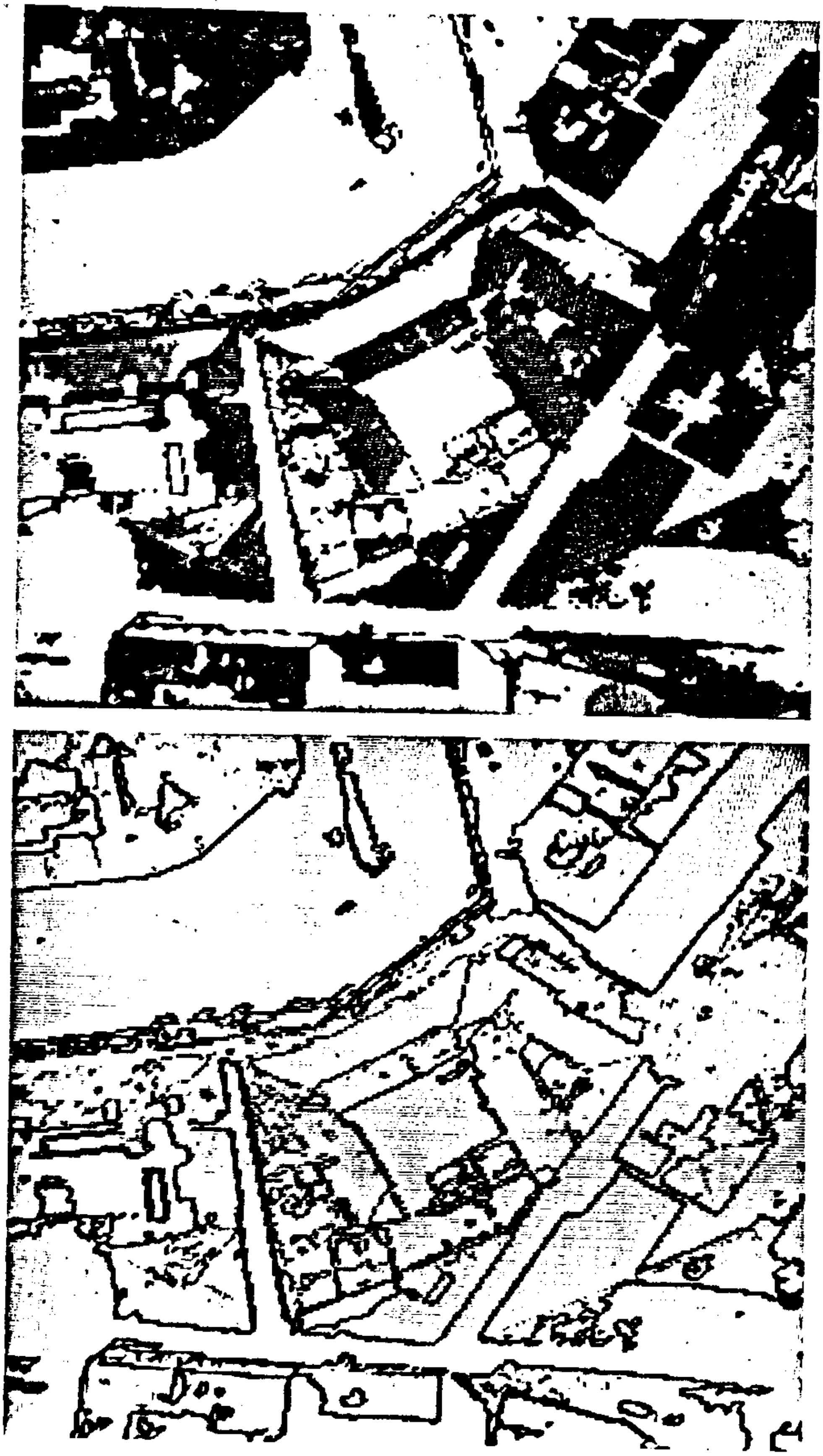


35 B Esempio di valutazione della superficie idrica nella stessa zona, mediante estrazione di una classe di livelli di grigio.

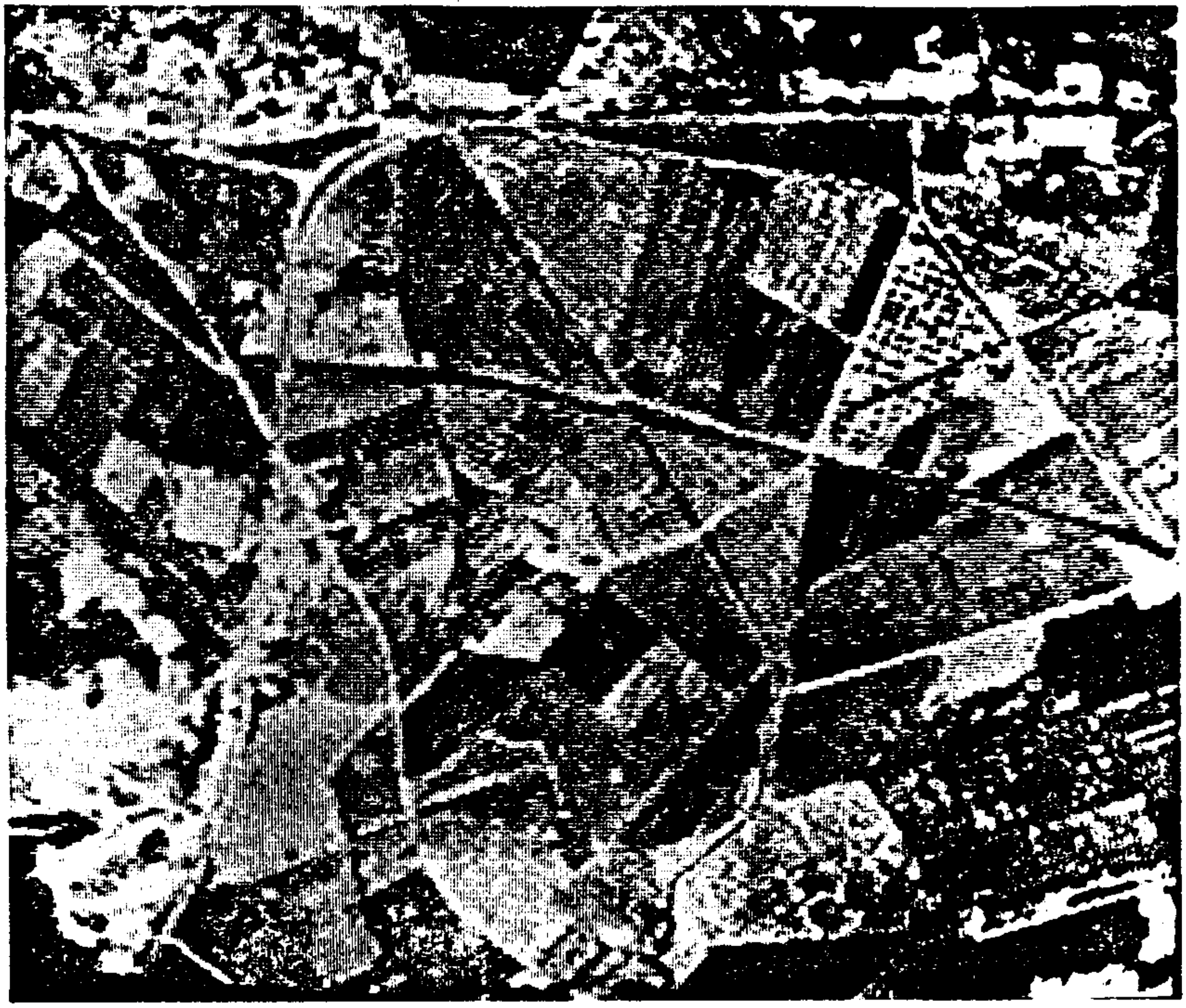
36 Esempio di analisi automatica strutturale in zona marina (mare Adriatico, in corrispondenza dell'Abruzzo) mediante uso di trasformazione di Karhunen-Loeve, con presentazione della prima componente (elaborazioni di TELESPAZIO, Roma).



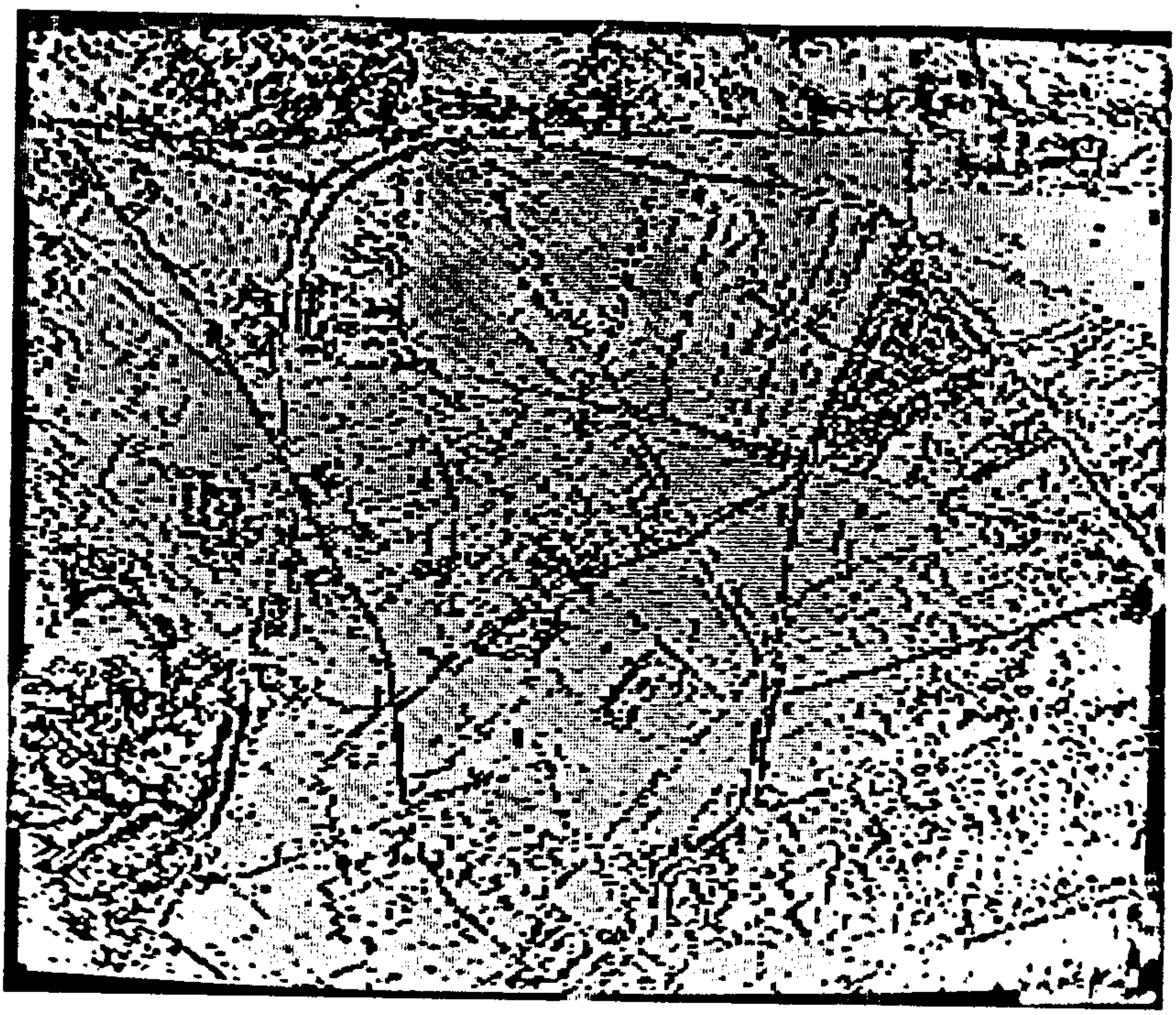
37 Esempio di elaborazione automatica su foto da aereo (zona di Livorno): (*a sinistra*) immagine in elaborazione; (*a destra*) prima elaborazione con esaltazione dei contorni.



38 Espansione (*in alto*) di una fascia dei livelli di grigio in una sottozona dell'immagine di tavola 37, ed estrazione dei contorni (*in basso*) per ottenere la planimetria.

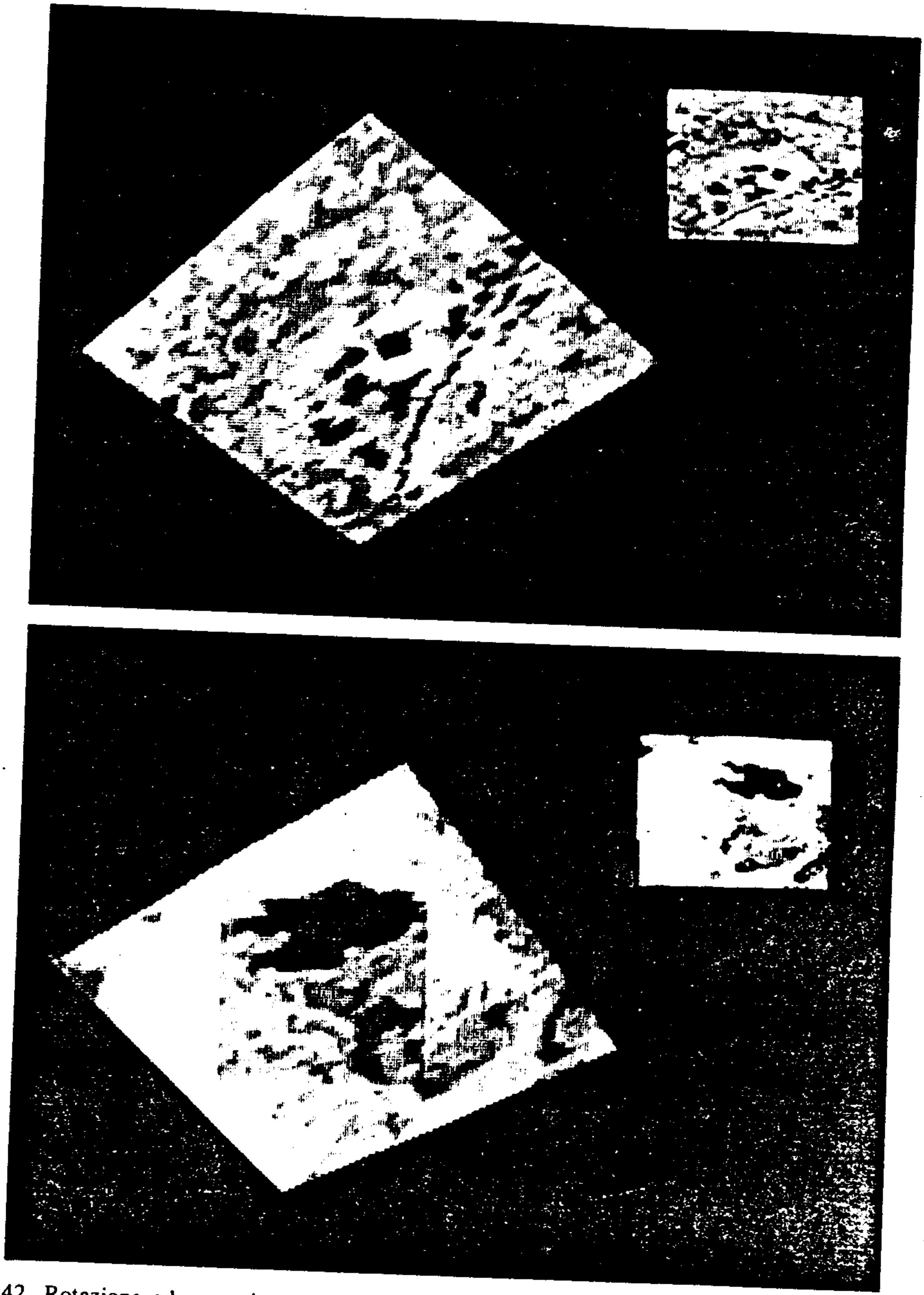


39 Rilevamento da aereo di zona agricola in Toscana.

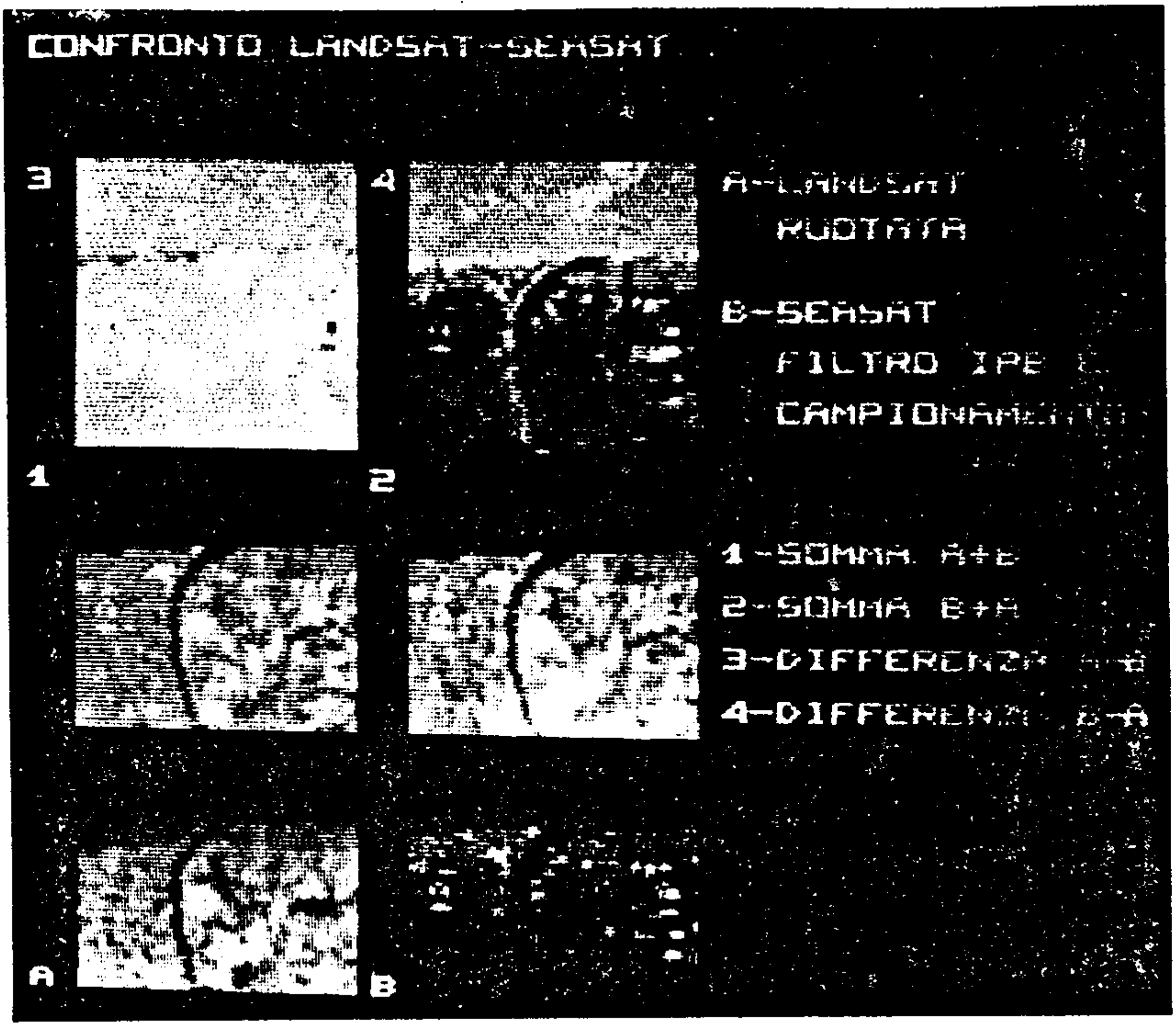


40 Estrazione di elementi strutturali dall'immagine di tavola 39.

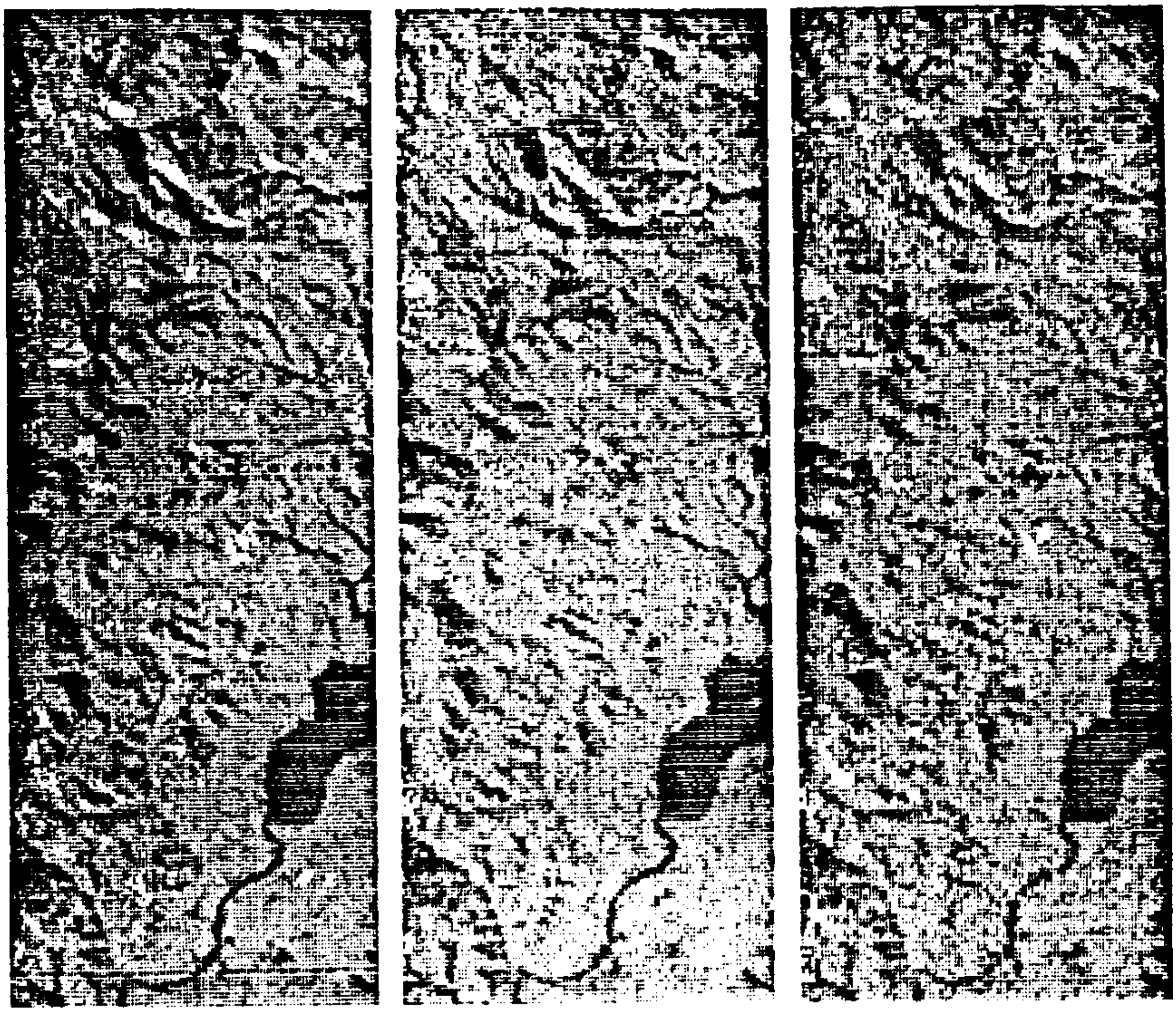
41 Immagine LANDSAT (sistema S-2) di zona vicino a Firenze.



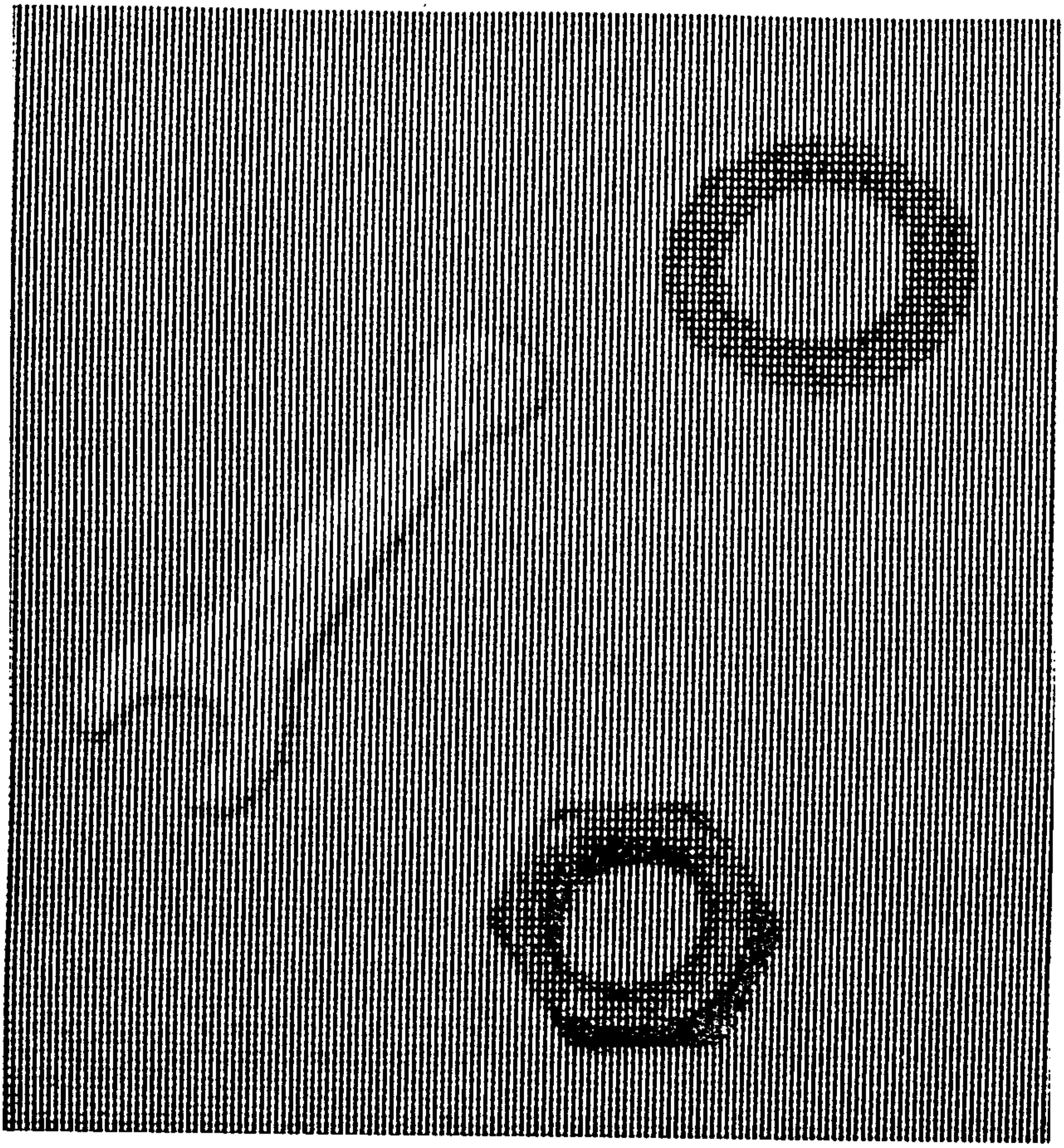
42 Rotazione ed espansione spaziale (*in alto*) di una piccola zona in basso a sinistra dell'immagine di tavola 41. Rotazione ed espansione di scala (*in basso*) di piccola zona in alto a sinistra, con esaltazione dei contrasti in una sotto-parte.



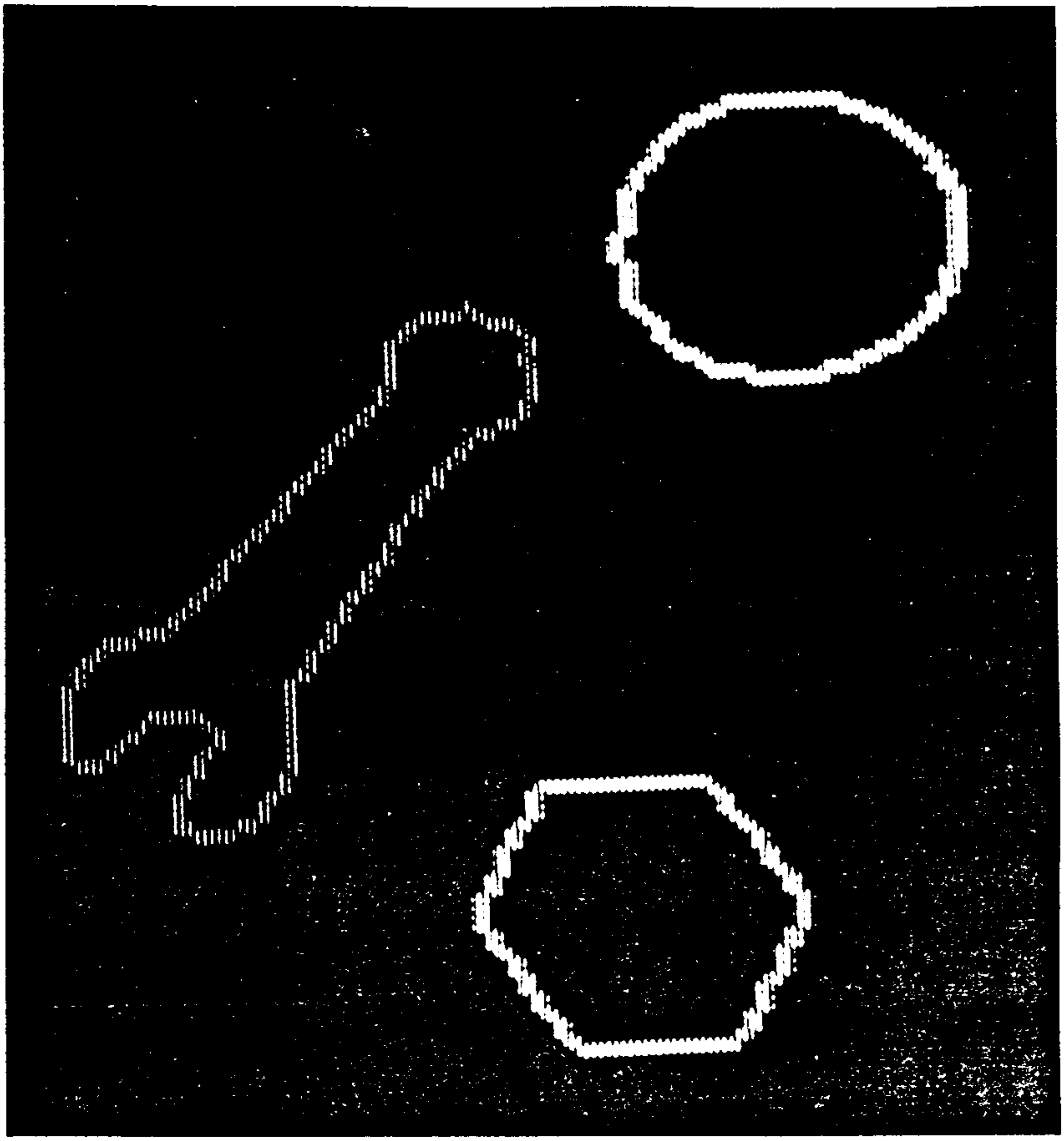

43 Confronto e correlazione fra immagine LANDSAT e immagine SEASAT, relative alla foce del fiume Sele. L'immagine LANDSAT (*A*) è stata opportunamente ruotata per "allinearla" a quella SEASAT (*B*), a sua volta filtrata e "sottocampionata" per ottenere immagini confrontabili. Le immagini 1-4 sono esempi di "mappe integrate".



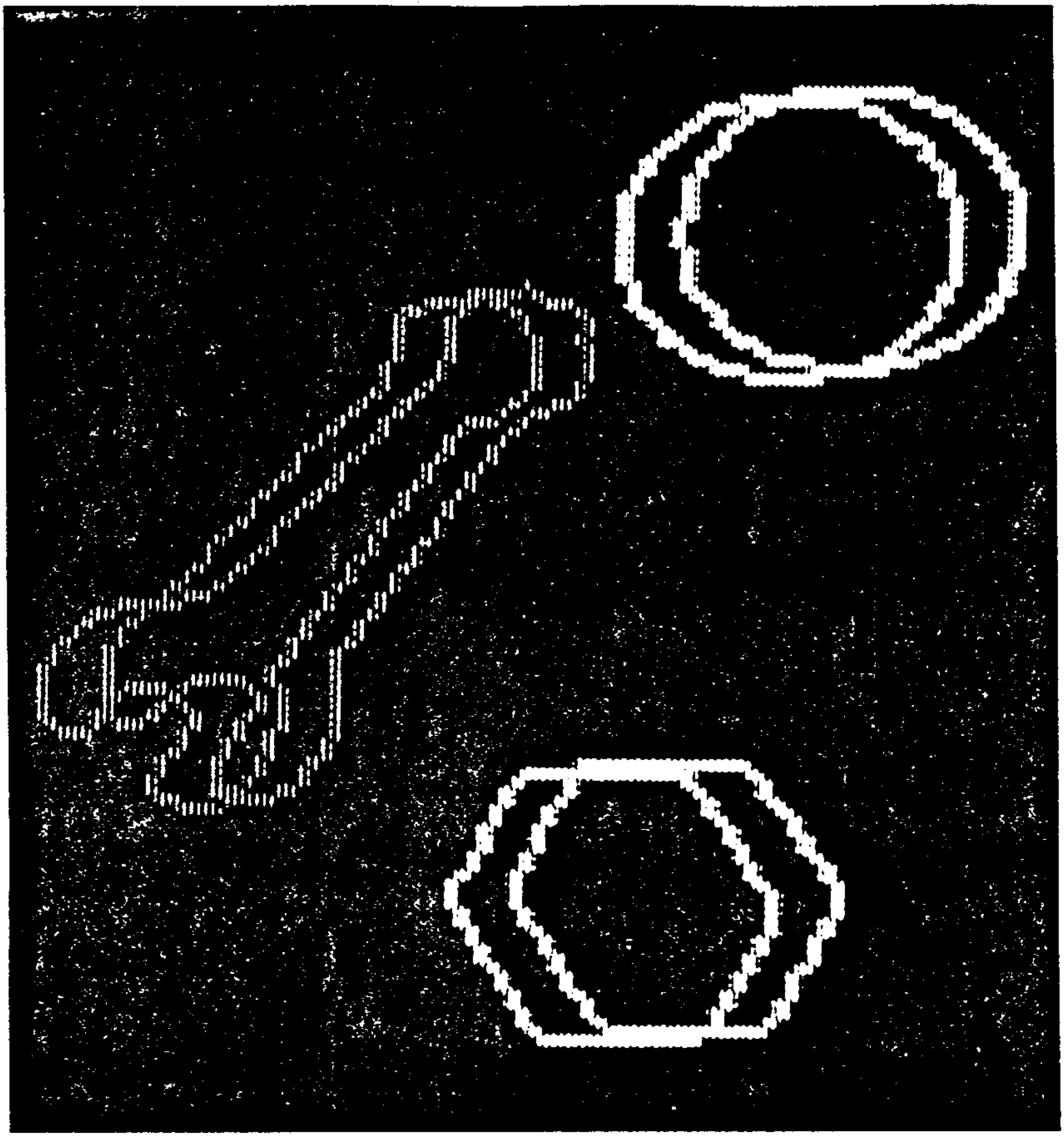
44 Esempio di applicazione della trasformata di Walsh FWT e codifica con lunghezza di parola variabile su immagine LANDSAT: (*a sinistra*) immagine originaria; (*al centro*) immagine ricostruita con rapporto di compressione circa uguale a 2,2; (*a destra*) immagine ricostruita con rapporto di compressione circa uguale a 4.



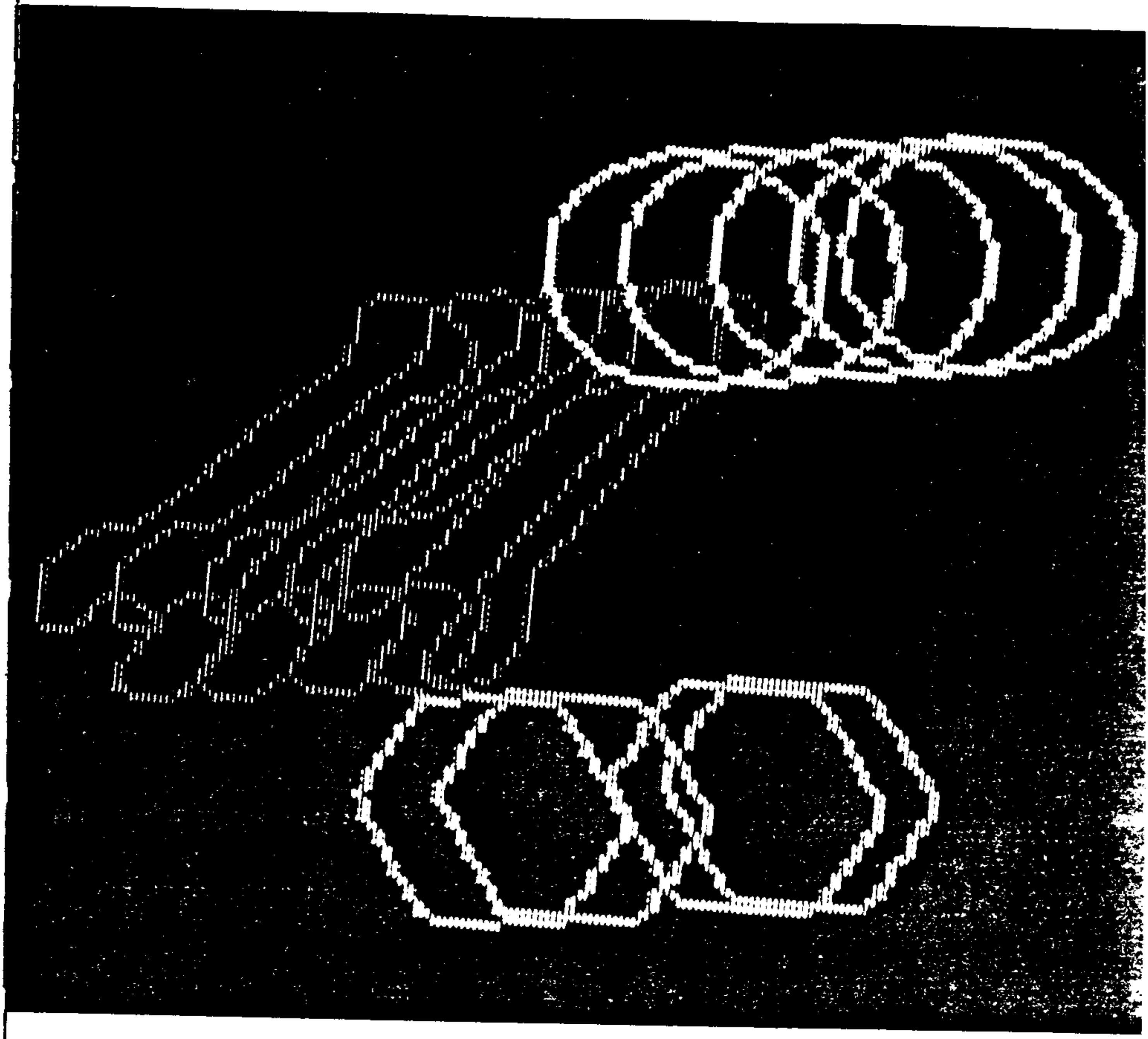
45 Esempio di riconoscimento e inseguimento di oggetti meccanici: acquisizione di scena con tre oggetti meccanici (chiave, dado e rondella).



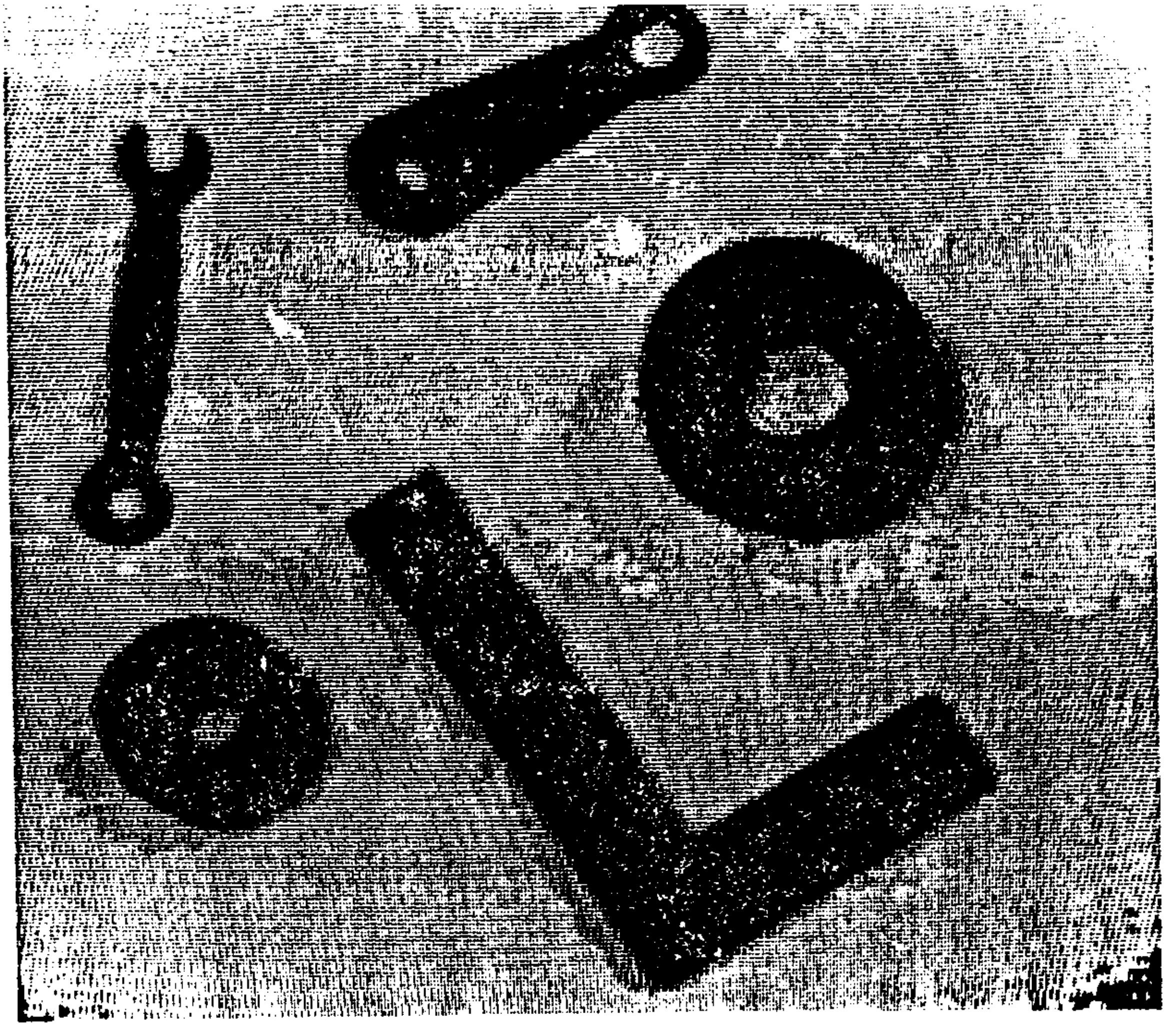
46 Estrazione dei contorni e riconoscimento dei tre oggetti (giallo: dado; rosso: chiave; bianco: rondella).

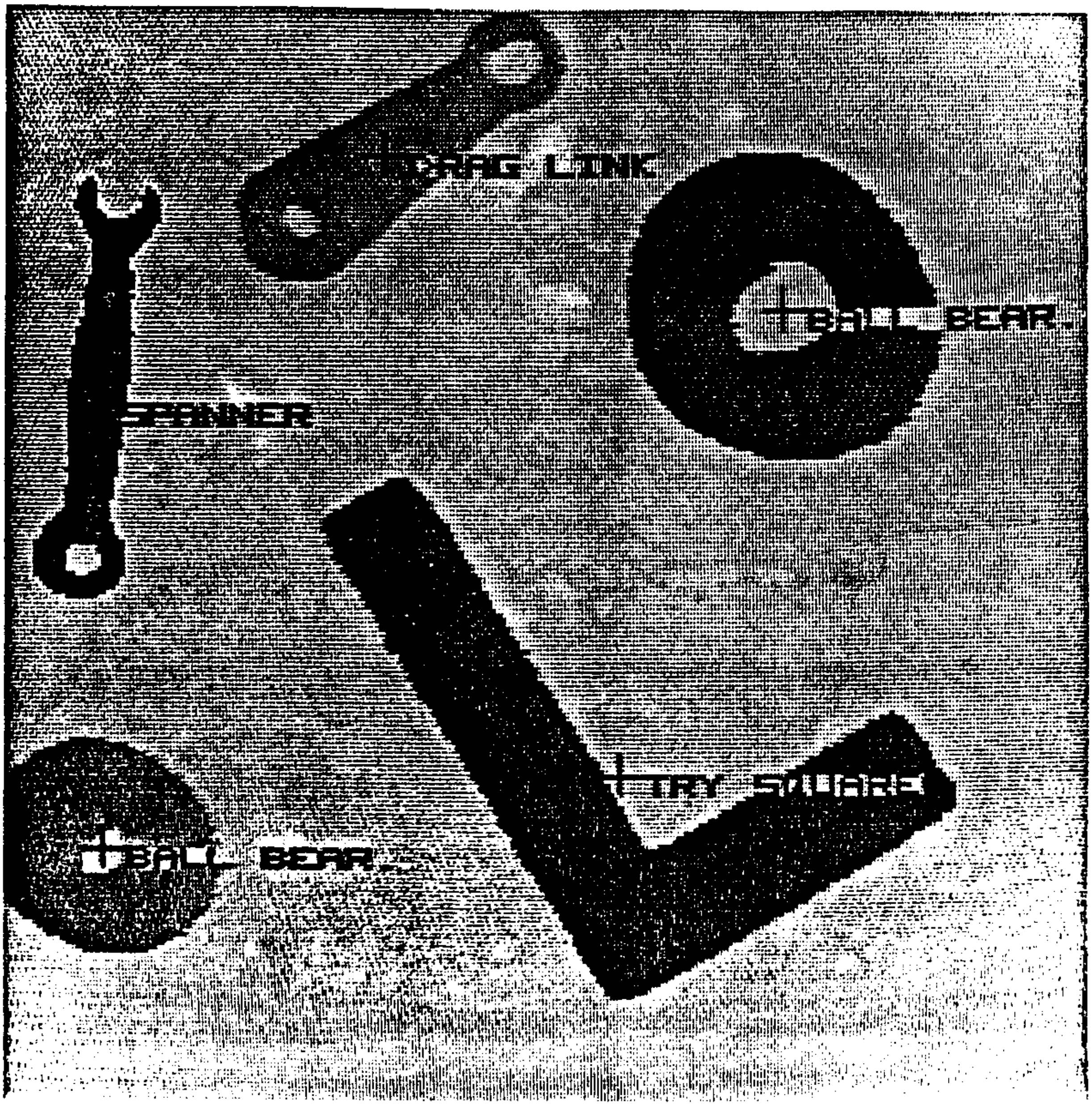


47 Inseguimento degli oggetti di tavola 45 con relativo riconoscimento dopo un piccolo spostamento.



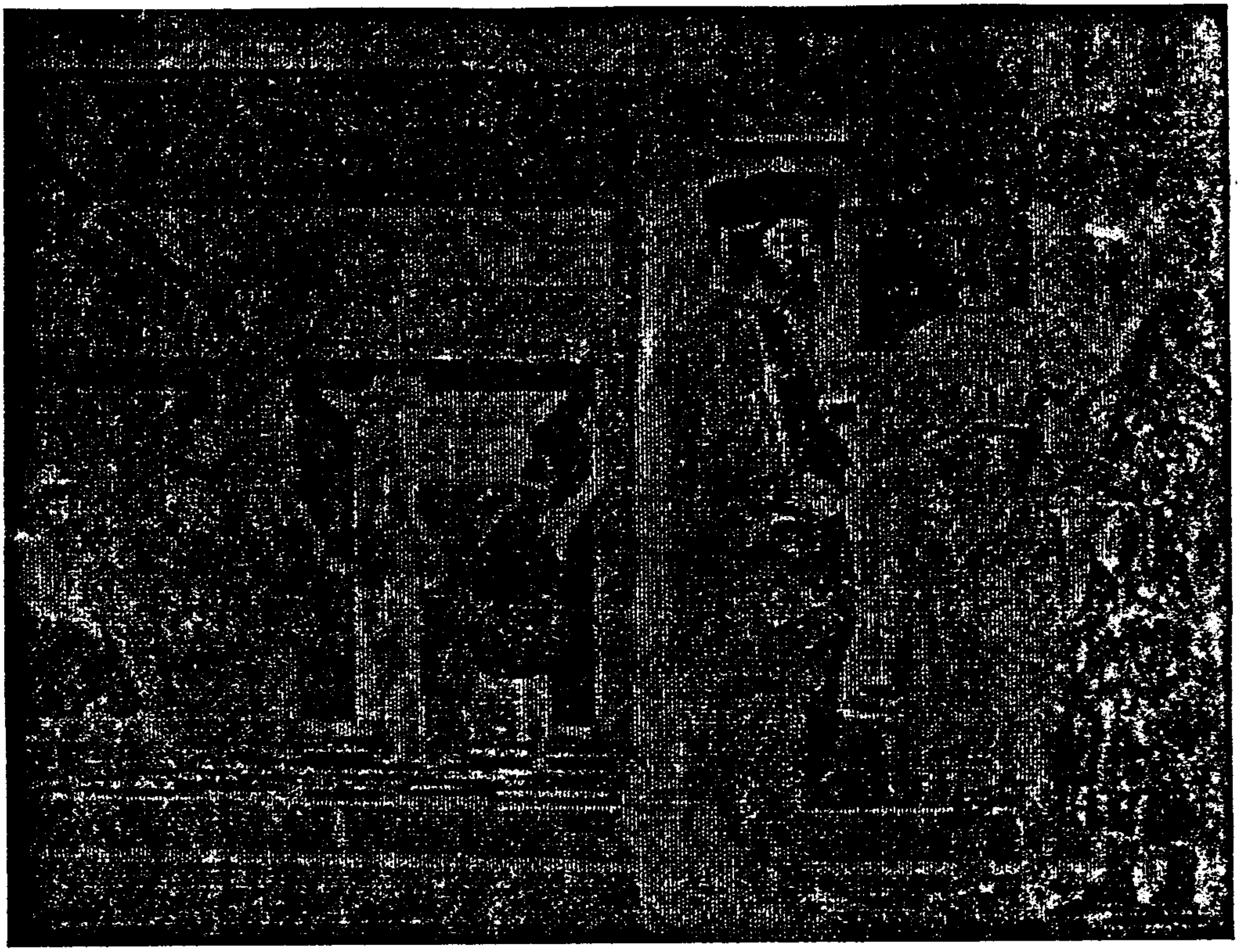
48 Inseguimento e riconoscimento degli oggetti di tavola 45 dopo una sequenza di cinque spostamenti.





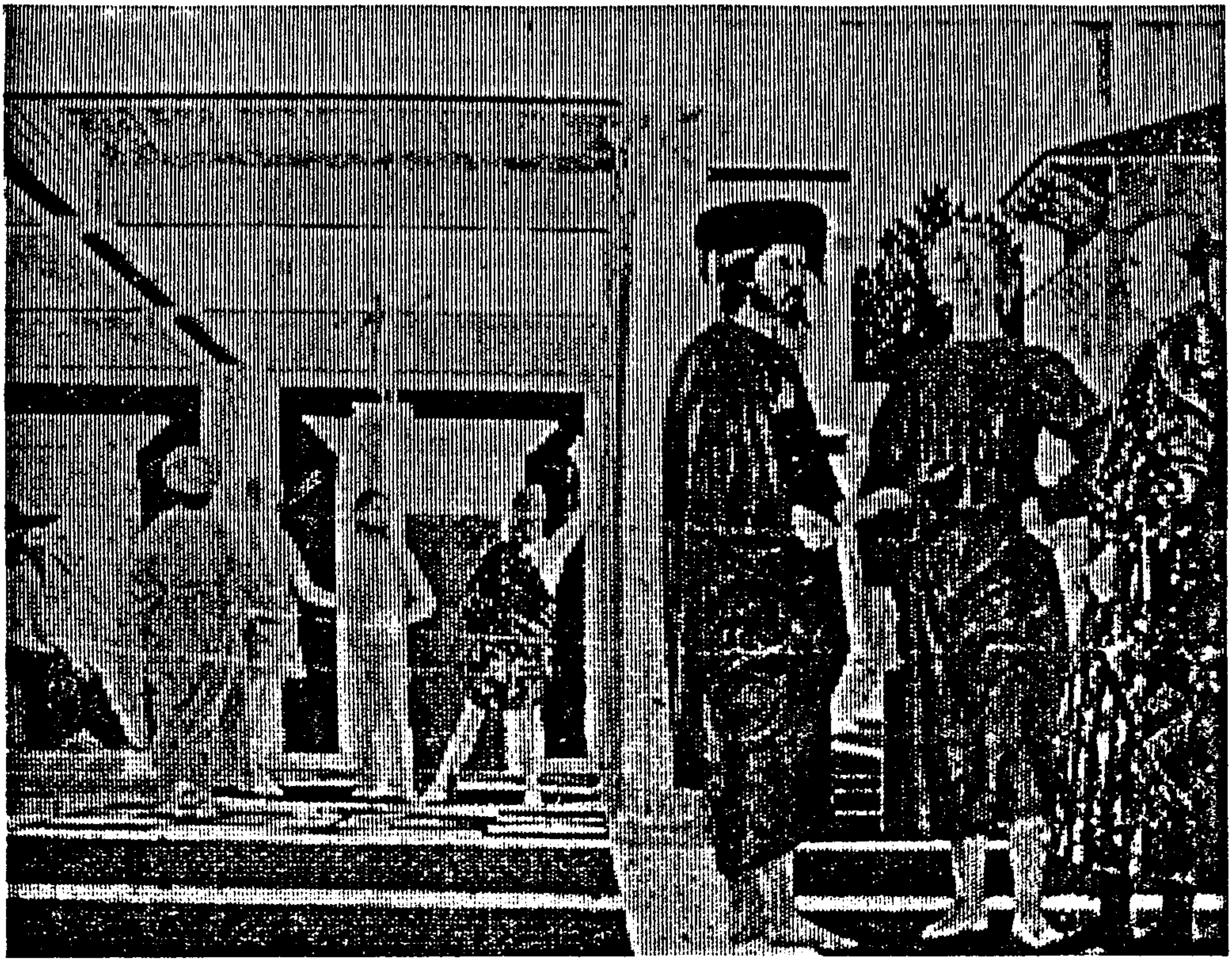

50 Riconoscimento finale con individuazione del baricentro e identificazione scritta degli oggetti di tavola 49.

49 Esempio di riconoscimento di oggetti meccanici con la tecnica degli "invarianti inerziali": (*in alto*) immagine acquisita; (*in basso*) risultato della pre-elaborazione.

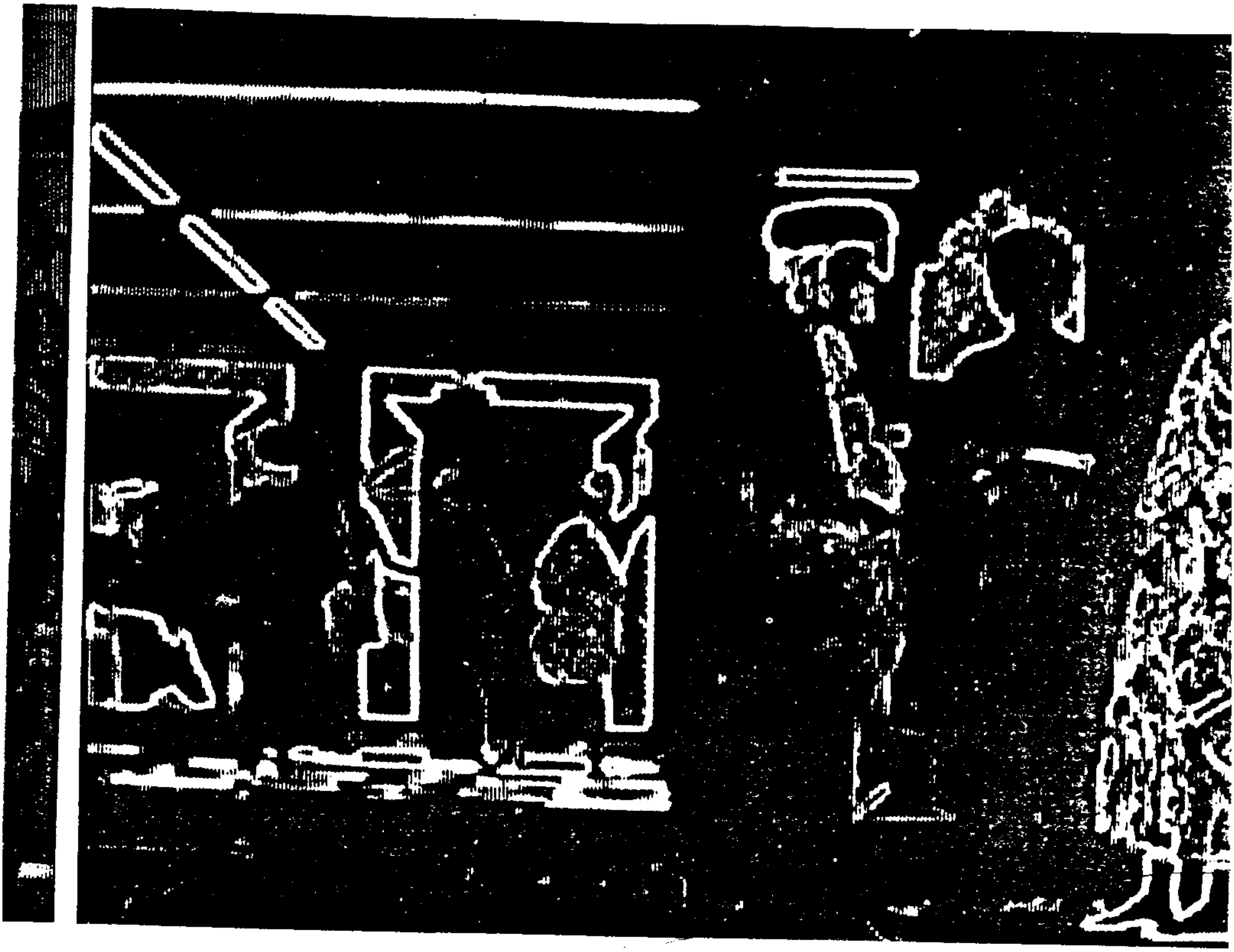


51 Esempio di digitalizzazione del dipinto *La flagellazione* di Piero della Francesca: presentazione del colore fondamentale "rosso".

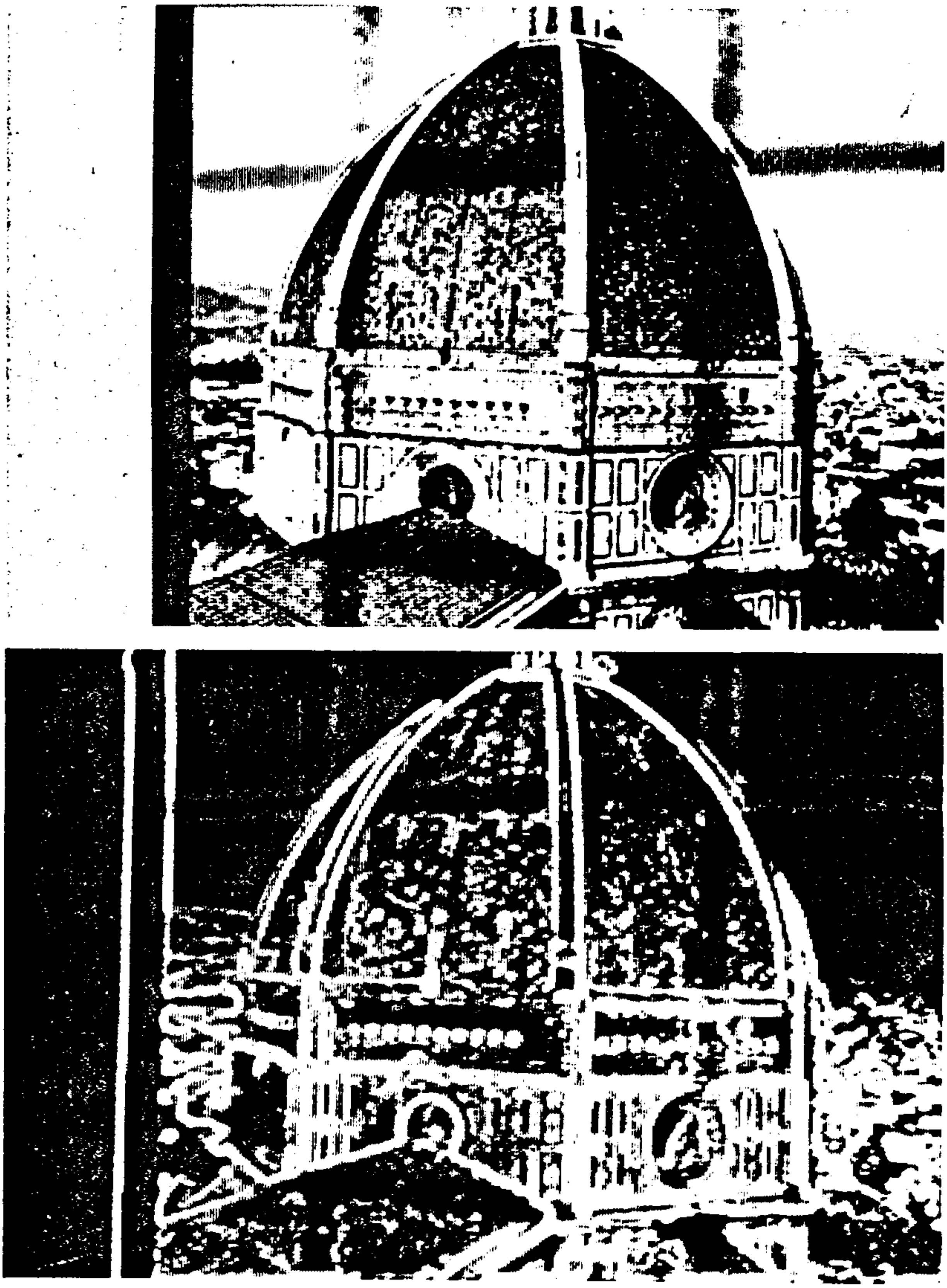
:sempio di digitalizzazione della *Flagellazione*: questa volta il colore fondamen-
il verde.



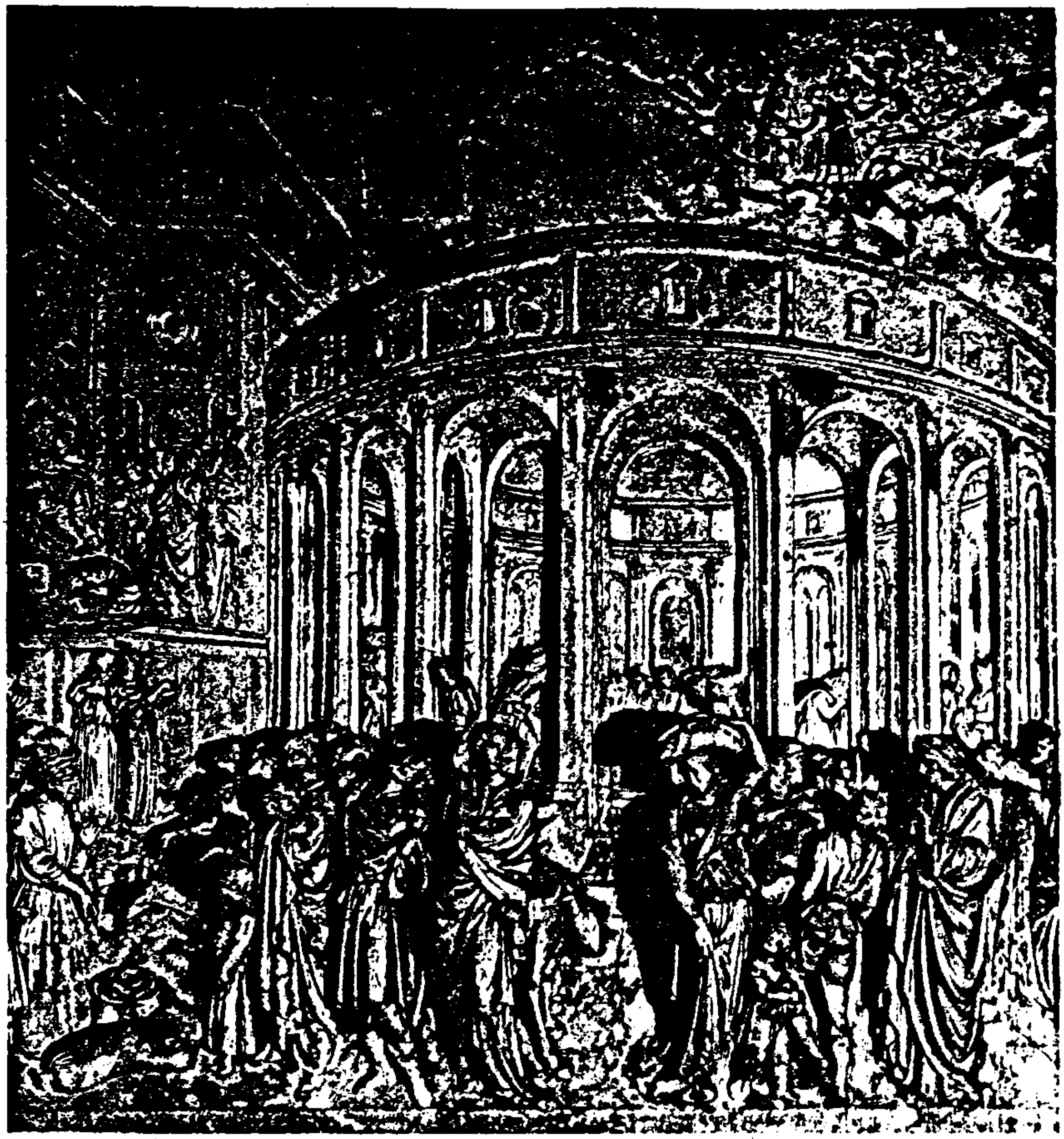
53 Sintesi dei due colori delle tavole 51, 52 e del "blu", per ricomporre la forma cromatica completa (sistema S-2, 256·256 pixel).



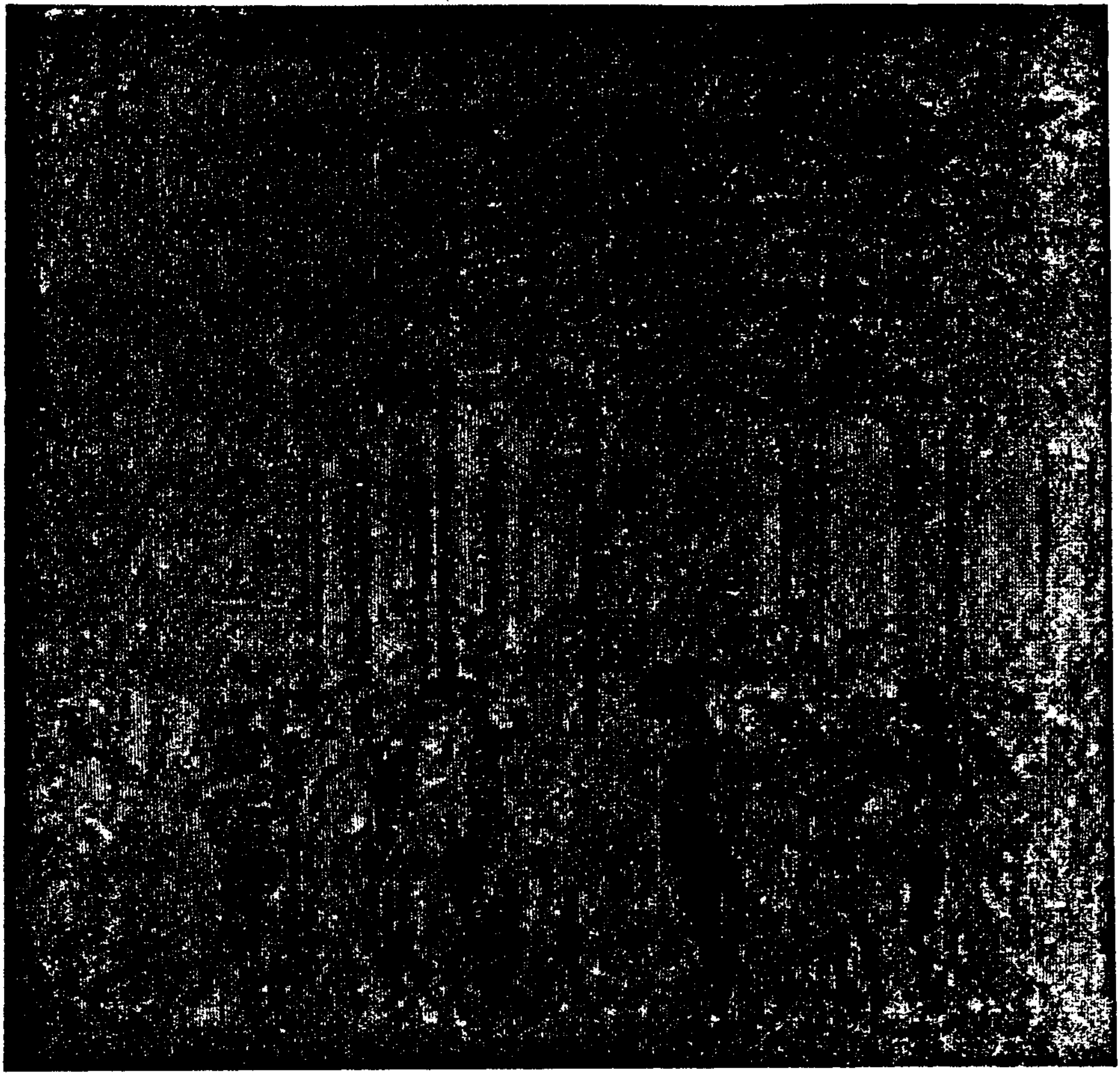
54 Estrazione dei contorni con operatore 3·3 a gradiente sulla *Flagellazione* (presentazione sempre con sistema S-2).



55 Esempio di estrazione degli elementi strutturali su una ripresa fotografica della cupola del Brunelleschi di Santa Maria del Fiore a Firenze: (*in alto*) ripresentazione al monitor (sistema S-2) della foto digitalizzata; (*in basso*) estrazione dei contorni con operatore 3·3 a gradiente e presentazione in falso colore per dare più evidenza.

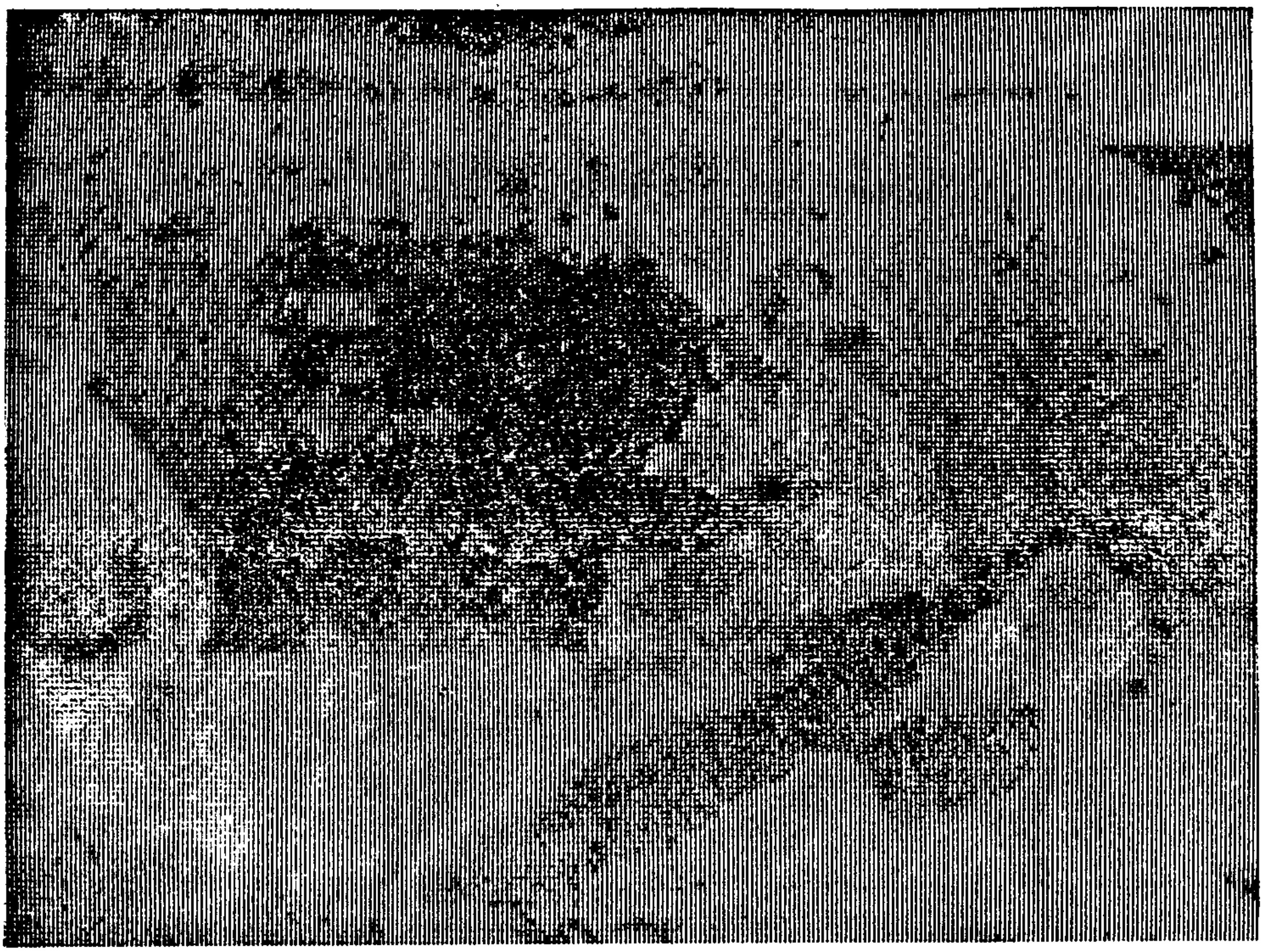


56 Indagine sulla formella *Storie di Giuseppe* della porta del Battistero di Firenze eseguita dal Ghiberti: foto della formella.

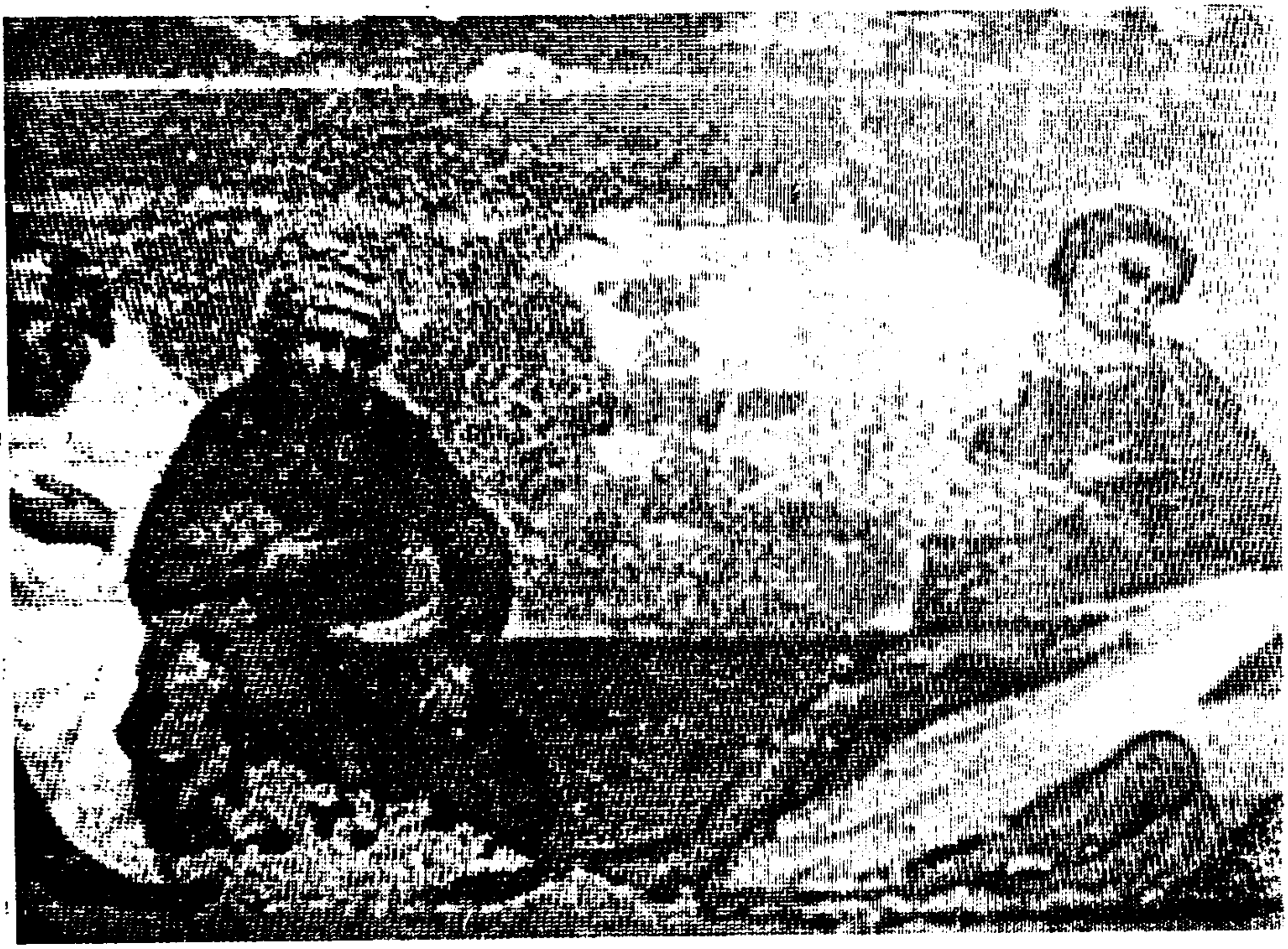


57 Digitalizzazione dell'immagine di tavola 56 con filtro verso l'infrarosso; sono messi in evidenza gli elementi strutturali.

58 Digitalizzazione analoga alla precedente sulla parte posteriore, rovesciata, in modo da ritrovare le corrispondenze geometriche con la parte anteriore.

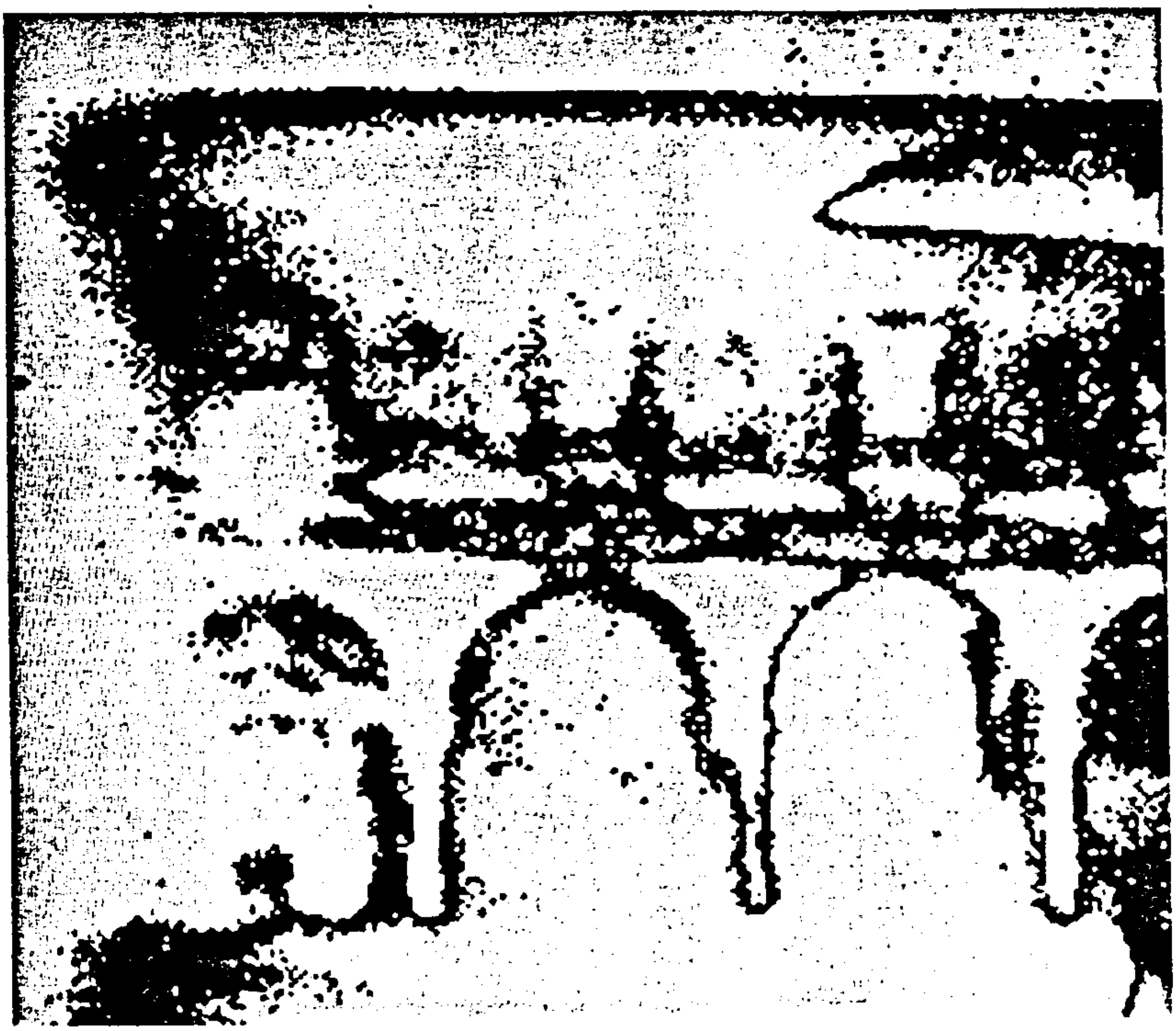


59 Esempio di analisi su parte di un dipinto in corso di restauro pittorico: presentazione di un'estrazione del colore "rosso" (si vede la zona centrale, fra le figure, che è in fase di restauro).



60 Presentazione in bianco e nero di una parte del dipinto di tavola 60, relativa all'estrazione in "rosso", con esaltazione dei contrasti, per un'analisi più accurata (sistema S-2) della zona in restauro (parte bianca al centro).

61 Indagine termografica (ripresa con camera termica, operante nella banda dell'infrarosso) sulla facciata dell'Ospedale degli Innocenti del Brunelleschi, a Firenze: termografia della facciata.



62 Acquisizione ed esaltazione dei contrasti dell'immagine di tavola 61 (sistema S-2): si nota come emerga la macchia scura a sinistra in alto, in corrispondenza dell'asse della colonna.

63 Esaltazione dei contrasti e filtraggio numerico per riconoscere la macchia scura della tavola 62. Si vede apparire, nel centro a sinistra, una forma che nella parte superiore è pressoché circolare (il bordo scuro delimita una semicirconferenza).

# Capitolo 14

# Applicazioni in biomedicina

## 14.1 Introduzione

Le immagini biomediche o "bioimmagini" sono di interesse crescente nell'ambito della medicina clinica per una sempre più accurata analisi e diagnosi. Le bioimmagini presentano due aspetti salienti:

– alto contenuto informativo dal punto di vista diagnostico;

– presenza di disturbi, alterazioni e rumore, che riducono in grado minore o maggiore la qualità delle immagini e in definitiva la possibilità di accedere al contenuto informativo precedente.

E' pertanto utile e spesso indispensabile ricorrere a opportune tecniche di elaborazione, sia per aumentare la qualità delle immagini sia per migliorare l'utilizzazione pratica dei dati informativi. Tali tecniche possono in definitiva rendere più sicura e ripetibile la diagnosi medica.

Sono attualmente disponibili diverse tecniche di indagine biomedica, oltre alle normali fotografie, in grado di produrre bioimmagini significative:

– scintigrafia nucleare;
– radiografia a raggi X;
– ecografia a ultrasuoni;
– termografia;
– radiometria a microonde;
– rilievo bidimensionale di potenziali (ECG, EEG);
– tomografia "computerizzata".

Tali tecniche sono attualmente utilizzate il più delle volte separatamente, anche se si riconosce l'importanza di convergere a una loro efficiente integrazione, al fine di migliorare e rendere più sicuro un determinato responso diagnostico (Cappellini, Dubini, 1981).

Nel seguito sono presentate le applicazioni più importanti delle tecniche numeriche alla elaborazione delle diverse bioimmagini, con alcuni esempi illustrativi.

## 14.2 Immagini fotografiche

Le normali fotografie in bianco-nero o a colori rappresentano la prima forma di immagine utile a scopi diagnostici. Tali fotografie (di arti, dell'occhio e di sue parti, di superfici del corpo ecc.) possono essere effettuate in condizioni normali del paziente o dopo somministrazione di opportune sostanze, aventi proprietà di esaltare l'immagine o di rendere più facile il riconoscimento di tessuti o di organi particolari.

Trattandosi di fotografie, del tipo considerato più volte nei precedenti capitoli, possono essere applicate le varie tecniche di elaborazione numerica già illustrate.

In particolare può essere utile l'applicazione di operatori locali (cap. 6) al fine di effettuare espansioni di scala dei livelli di grigio e quindi esaltazione dei contrasti, o per estrarre contorni delle strutture esaminate. Mediante tecniche di filtraggio numerico possono di nuovo essere effettuate opportune esaltazioni dei contrasti (con filtri del tipo passa-banda, parabolici o derivatori) o riduzioni di disturbi e alterazioni (filtri inversi) (cap. 7).

Un esempio illustrativo è mostrato nella tavola 14. Si tratta di una ripresa fotografica di una parte dell'occhio, effettuata dopo aver iniettato nel paziente sostanze particolari contenenti fluorosceina, che, giungendo nell'occhio, rende fluorescenti i vasi sanguigni. L'acquisizione dell'immagine è stata effettuata con un sistema del tipo S-2 e ha una risoluzione di 256 · 256 (Valli, Mariani, Baroni, 1981).

Si notano chiaramente i vasi sanguigni e, in particolare, nella parte sinistra a partire dal centro in alto, si osserva l'estrazione di un vaso sanguigno (con parte di un altro a sinistra), ottenuta con una particolare tecnica che fa uso di istogrammi "locali", estrazione dei contorni con operatore spaziale locale e algoritmo di "inseguimento".

## 14.3 Immagini scintigrafiche di medicina nucleare

Fra le prime applicazioni delle tecniche di elaborazione numerica alle bioimmagini sono proprio da considerarsi quelle relative alle immagini scintigrafiche di medicina nucleare. Ciò è dovuto sia al fatto che tali immagini sono disponibili da molti anni in forma numerica, sia alla loro particolare struttura con un numero di campioni (pixel) relativamente basso (di solito 64 · 64 o 128 · 128), oltre all'esigenza di migliorarne la qualità e di estrarre parametri informativi significativi per la diagnosi.

Nella scintigrafia si iniettano nel paziente sostanze marcate con radioisotopi, e con opportuni rivelatori si effettuano conteggi di radioattività relativamente ai vari organi esaminati. L'uscita è generalmente costituita da una serie di mappe di conteggi rilevati ad istanti successivi.

Fra le elaborazioni numeriche più utilizzate vi sono: correzioni dei livelli di grigio, variazioni di scala (in particolare espansioni di scala), presentazioni in falso colore (a più colori), istogrammi, uso di operatori locali spaziali, in particolare per estrazione dei contorni (cap. 6), analisi di Fourier (ampiezza e fase, cap. 5).

Alcuni esempi di elaborazioni del tipo precedente sono mostrati nelle tavole 15, 16, 17 (le immagini sono state ottenute presso l'Istituto di medicina nucleare di Firenze).

Nella tavola 15 è mostrato un esempio di elaborazione parametrica su una serie di 32 immagini di 0,5 s, relative alla zona cardiaca, in primo passaggio del tracciante dopo iniezione impulsiva in una vena: si ricavano immagini che rappresentano in ciascun punto i parametri dell'impulso corrispondente all'andamento temporale del conteggio in ogni elemento di matrice: ampiezza (valori dei massimi), tempo in cui si raggiunge il massimo (tempi di massimo), tempo in cui si arriva al valore metà del massimo in salita (tempi di massimo/2 (S)), tempo in cui si scende al valore metà del massimo (tempi di massimo/2 (D)). Questa metodica permette di ottenere un'ottima segmentazione dell'immagine in zone anatomiche diverse: ad esempio nella tavola 15 i colori giallo e bianco indicano i polmoni, il blu corrispònde alla vena cava dell'atrio destro, il celeste indica la vena polmonare, il colore bianco-rosso corrisponde al ventricolo sinistro, il rosso indica l'aorta. Quest'analisi permette inoltre una stima immediata dei tempi di transito tra le varie zone.

Nella tavola 16 A è mostrato un esempio di analisi automatica del primo transito del tracciante in un esame del cuore. Viene determinata la zona corrispondente al ventricolo sinistro e destro. Su tale zona vengono estratti i conteggi. Sono ricavate le curve corrispondenti al passaggio del bolo radioattivo nella parte destra e sinistra del cuore. Da queste viene ricavata un'immagine del ventricolo destro al tempo TR corrispondente al massimo della prima curva e un'immagine del ventricolo sinistro dalla seconda curva al tempo TL. Dalle due curve si ottiene poi il tempo medio di passaggio polmonare TMPP.

Nella tavola 16 B sono riportati i risultati dell'analisi di Fourier su una serie di immagini che rappresentano l'evoluzione temporale dell'immagine cardiaca in un ciclo. L'immagine in basso rappresenta la distribuzione delle fasi della prima armonica. L'istogramma in alto corrisponde alla distribuzione degli angoli di fase nei diversi elementi dell'immagine (in ordinate: numero di pixel che hanno un dato valore dell'angolo di fase; in ascisse: valore dell'angolo di fase). Si evidenzia così la separazione tra la distribuzione relativa alla zona ventricolare (angoli di fase tra $0^\circ$ e $180^\circ$) e a quella atriale (angoli di fase tra $180^\circ$ e $360^\circ$). Nell'immagine i valori degli angoli sono rappresentati in falso colore: scala cromatica da $0^\circ$ a $360^\circ$ corrispondente a blu-celeste-verde-giallo-bianco-viola-rosso.

La tavola 17 illustra una metodica di elaborazione automatica di sequenze di immagini angio-cerebrali. Viene anzitutto determinata automaticamente un'immagine che corrisponde alla fase temporale in cui il tracciante si trova nei vasi arteriosi (immagine a sinistra in basso). Viene quindi determinato il contorno dei vasi e con una procedura di assottigliamento (*thinning*) dei contorni stessi viene ricavato l'albero arte-

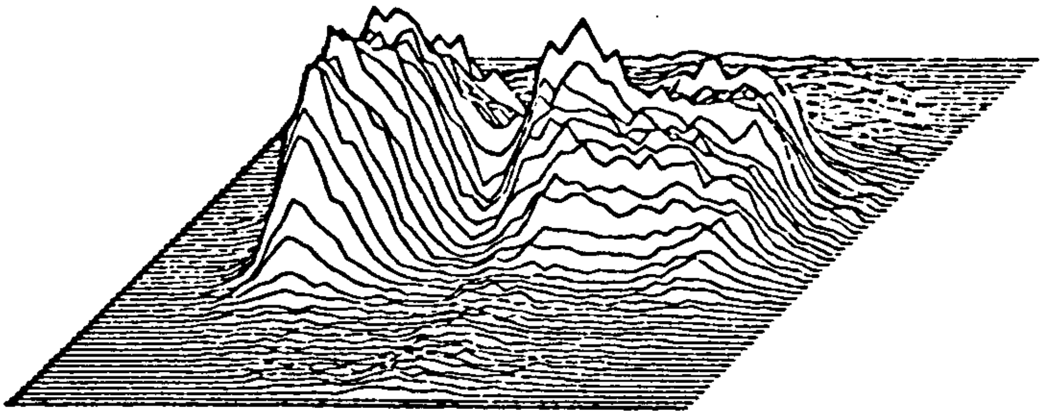
rioso (immagine a sinistra in alto) (vedi cap. 6). Su tale albero sono determinate in modo automatico le zone (blu-verde-viola-bianco) di interesse. E' poi ottenuto il contorno del cranio e sono evidenziate le zone di interesse corrispondenti agli emisferi destro e sinistro (giallo e rosso) e al seno venoso (celeste). Su tali aree sono ricavati gli istogrammi dei conteggi nel tempo (curve a destra della figura). Viene anche applicato il metodo dei minimi quadrati (usando un modello matematico del tipo *random-walk* per la prima parte della curva) per determinare la curva di transito del tracciante. Sono infine ricavati numericamente i tempi di transito tra le varie zone e in particolare i tempi di transito relativi all'emisfero destro e sinistro. Il tempo totale di calcolo (con calcolatore HP 21 MX, senza alcun intervento dell'operatore) è 58 s su una serie di 60 immagini (ciascuna ottenuta in un secondo) di $64 \cdot 64$ pixel.

Altre elaborazioni numeriche utili che possono essere effettuate sulle immagini di medicina nucleare sono: il filtraggio numerico 1D e 2D e la riduzione o compressione dei dati.

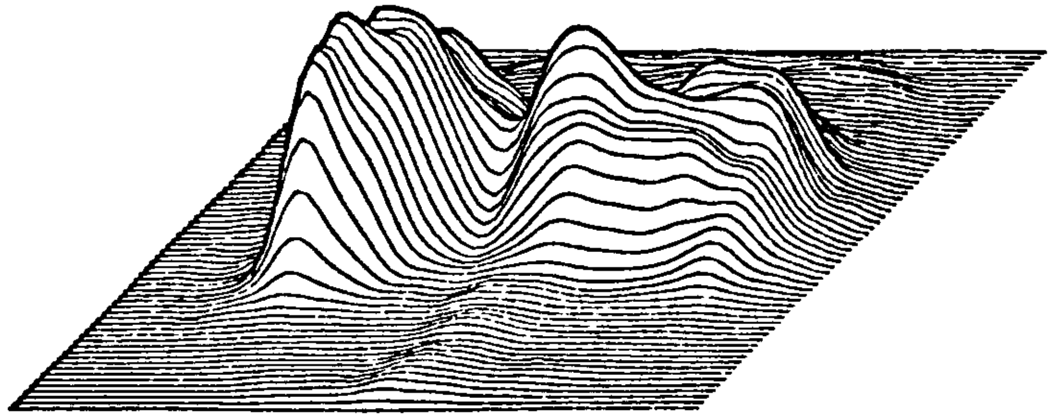
Per quanto riguarda il filtraggio numerico, con filtri numerici 2D di tipo passa-basso possono essere ridotte componenti di frequenze spaziali elevate; con filtri di tipo passa-banda possono essere effettuate operazioni di esaltazione dei contrasti o di estrazione di bande di frequenze utili; mentre con filtri di tipo inverso possono essere effettuate operazioni di correzione ed estrazione del segnale dal rumore (vedi cap. 7). Un esempio di filtraggio numerico 2D passa-basso di un'immagine scintigrafica relativa al fegato è mostrato nella figura 14.1. Si vede chiaramente, dalla presentazione prospettica, come la mappa filtrata (a destra) presenti una configurazione più regolare e di più facile interpretazione. Ciò è confermato dalla figura 14.2, che mostra per la stessa immagine, prima e dopo il filtraggio, gli "iso-contorni" (contorni di livelli uguali di radiazione). Naturalmente occorre fare molta attenzione – in relazione anche ai diversi fini diagnostici – che operazioni di filtraggio passa-basso del tipo indicato non tolgano dalla scintigrafia in esame informazioni utili o dettagli di interesse clinico (Casini, Castellini, Emiliani, Locchi, Lotti, 1975; Cappellini, 1977). Filtri numerici di esaltazione dei livelli o di estrazione dal rumore possono evidenziare formazioni patologiche (Baroncelli, Del Bimbo, Zappa, 1978).[1]

Per quanto riguarda la compressione dei dati, di grande interesse e utilità dato il grande numero di mappe scintigrafiche raccolte in un Istituto di medicina nucleare, è anzitutto da osservare che filtri numerici del tipo sopra indicato sono anche convenienti come pre-elaborazione prima di effettuare operazioni di compressione vere e proprie (è ad esempio evidente la riduzione di complessità e della relativa quantità di dati nell'esempio delle figg. 14.1 e 14.2). La tabella 14.1 mostra i risultati ottenuti applicando tecniche di compressione dei dati, basate sull'uso di trasformazioni veloci (FFT, FWT) e soglie, a tipiche immagini scintigrafiche; la stessa tabella mostra gli

[1] Una conseguenza molto interessante delle tecniche di estrazione dal rumore e di ricostruzione di immagini con bassa risoluzione è rappresentata dal fatto che con tali tecniche possono essere ridotte le dosi di materiale radioattivo, rendendo meno invasiva l'indagine nucleare.



(*a*)



(*b*)

Figura 14.1
Esempio di filtraggio numerico 2D FIR di tipo passa-basso su immagini scintigrafiche (presentazione prospettica).

**Tabella 14.1** Risultati di compressione dei dati su mappe di medicina nucleare 64 · 64, ottenuti applicando la trasformata di Walsh veloce (FWT) senza e con un prefiltro numerico 2D passa-basso.

| Rapporto di compressione | 6 | 8 | 12 | 16 |
|---|---|---|---|---|
| FWT | | | | |
| errore di picco | 0,0522 | 0,1148 | 0,1648 | 0,2573 |
| errore quadratico medio | 0,0074 | 0,0120 | 0,0193 | 0,0334 |
| FWT con prefiltro | | | | |
| errore di picco | 0,0269 | 0,0837 | 0,1319 | 0,2367 |
| errore quadratico medio | 0,0040 | 0,0108 | 0,0186 | 0,0355 |

*Fonte*: Istituto di Elettronica e Istituto di Medicina nucleare, Firenze.

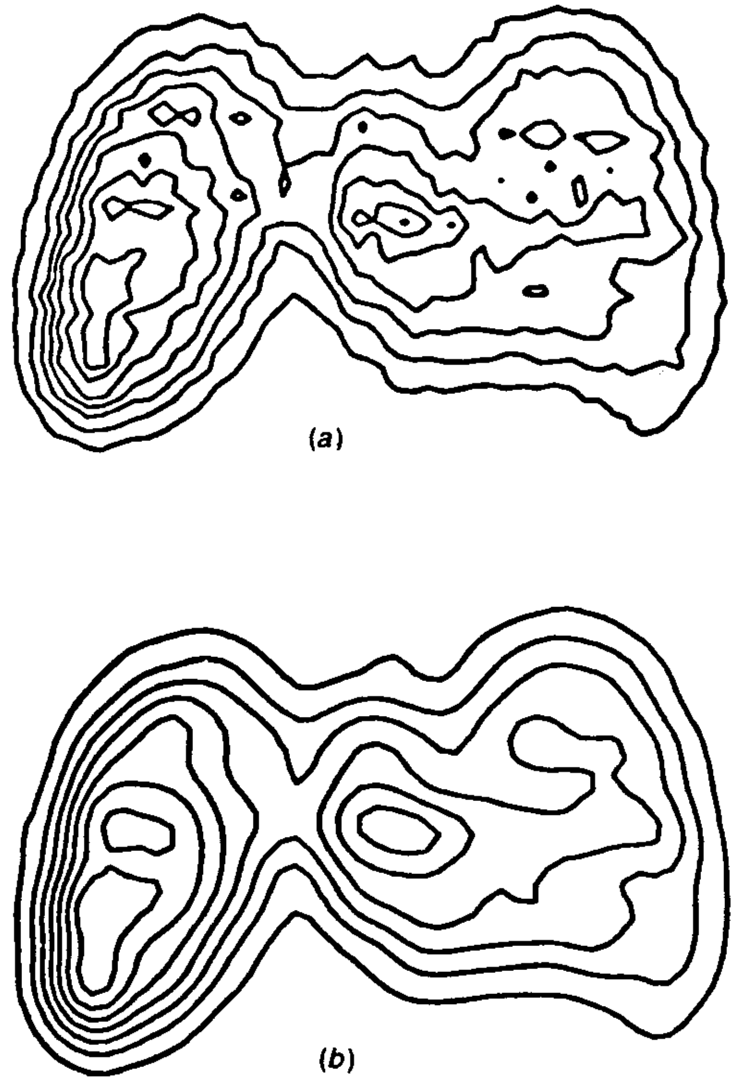



**Figura 14.2**
Presentazione degli "isocontorni" relativi alle immagini di figura 14.1.

aumenti di efficienza (maggiore riduzione dei dati) ottenibili con pre-filtraggio numerico 2D passa-basso.

## 14.4 Immagini radiografiche

Le tecniche di analisi mediante raggi X (radiografie) sono ormai d'impiego comune nelle diagnostica clinica, relativamente a qualsiasi organo o parte del corpo umano. Le immagini ottenute (lastre, pellicole...) sono in genere abbastanza chiare per una interpretazione medica. Le tecniche di elaborazione numerica possono però, specialmente in casi con bassa risoluzione, oppure in analisi relative a organi difficili, essere

di notevole utilità per migliorare la qualità dell'immagine, aumentando i contrasti e mettendo più chiaramente in evidenza alcuni particolari di interesse clinico.

Un esempio del tipo precedente è mostrato nella tavola 18: in alto è mostrata la radiografia originale, relativa a un torace; in basso è mostrato il risultato ottenuto con applicazione di un filtro numerico 2D IIR ricorrente del tipo passa-banda di esaltazione dei contrasti: si nota chiaramente l'effetto di miglioramento della qualità dell'immagine radiografica, con una più netta rappresentazione delle costole (Garibotto, Garozzo, Micca, 1981).

Un altro esempio di elaborazione di una radiografia a raggi X in più fasi successive è mostrato nella tavola 19. L'immagine in alto a destra rappresenta una radiografia (da un film a 35 mm) del cuore (in particolare ventricolo sinistro) prima dell'iniezione nel paziente di un mezzo di contrasto (a base di iodio) e costituisce quella che si chiama immagine di "fondo" (o *mask*); l'immagine in alto a sinistra mostra la radiografia della stessa zona, quando il liquido iniettato è arrivato al cuore (si vede in particolare la zona più chiara relativa al ventricolo sinistro); l'immagine in basso a sinistra è stata ottenuta come differenza numerica fra le precedenti; l'immagine in basso a destra rappresenta infine il risultato dell'estrazione dei contorni nella zona relativa al ventricolo sinistro, ottenuta mediante istogrammi locali e opportune soglie (Baroni, Valli, Pierotti, 1980).

## 14.5 Immagini termografiche

L'analisi termica delle varie parti del corpo umano può essere assai utile per due scopi principali:

– evidenziare malformazioni di varia natura (in particolare tumori, ad esempio nel seno delle donne) per la diversa temperatura a cui vengono a trovarsi tessuti sani e tessuti malati;
– controllare lo stato di riscaldamento dei tessuti (ipertermia) effettuato a scopo curativo (in particolare come terapia del cancro, tenendo presente che le celle tumorali risultano più sensibili al calore di quelle normali nell'intervallo di temperatura da 41° a 45 °C), in genere mediante tecniche a radio-frequenza o a microonde).

Si possono ottenere immagini termiche (mappe termiche o termografie) mediante due tecniche principali:

– termografia nell'infrarosso (IR), ormai assai sviluppata con apparati collaudati (ad esempio del tipo AGA Thermovision), che utilizza rivelatori di radiazione IR emessa dal corpo umano;
– radiometria a microonde, ancora in fase di sviluppo (anche se esistono già apparati disponibili sul mercato), che utilizza rivelatori (veri e propri ricevitori estremamente sensibili) nella banda delle microonde (da frazioni di gigahertz a 15 ÷ 20 GHz) (Robert e altri, 1980).

Le due tecniche hanno proprietà diverse: la termografia IR fornisce indicazioni essenzialmente sulla temperatura superficiale (profondità dell'ordine dei millimetri); la radiometria a microonde permette di avere informazioni sulla temperatura più in profondità nei tessuti (ordine dei centimetri); d'altra parte la risoluzione spaziale (cioè temperatura rivelabile sulla superficie) della termografia IR è in genere superiore (misure su zone più piccole) rispetto alla radiometria a microonde. Da queste considerazioni scaturisce l'interesse di sviluppare tecniche integrate, che uniscano rivelatori dei due tipi.

Le tecniche di elaborazione numerica sono utilizzate separatamente sui due sistemi di misura per esaltare le variazioni e i contrasti e per estrarre le isoterme (cioè le curve relative a punti aventi la stessa temperatura). E' evidente l'interesse ad applicare le tecniche numeriche alle misure integrate per unire le relative proprietà di risoluzione in profondità e in senso trasversale.[2]

## 14.6 Immagini ecografiche da apparati a ultrasuoni

Le diverse tecniche ecografiche di analisi sono basate sulla rilevazione delle riflessioni della radiazione ultrasonica ($1{,}5 \div 15$ MHz) da parte delle diverse strutture o organi all'interno del corpo umano, che vengono differenziati per la loro diversa "impedenza acustica" (tessuti molli, muscoli ecc.). Si possono effettuare diverse misure: valutazione dell'ampiezza relativa della radiazione riflessa rispetto a quella incidente; misura dell'intervallo temporale tra l'istante di emissione della radiazione e l'istante di ricezione dell'eco; determinazione delle variazioni di tali parametri in funzione della frequenza e dell'orientazione spaziale del fascio.

Le applicazioni cliniche dell'ecografia sono in rapida espansione, grazie alle proprietà di questa tecnica di essere (a differenza della scintigrafia e della radiografia) non invasiva e atraumatica: si possono effettuare indagini statiche e dinamiche.

Le tecniche di elaborazione vengono applicate per aumentare le capacità diagnostiche dei dati ultrasonici: in particolare, sono di notevole interesse le tecniche di esaltazione dei contrasti e di estrazione dal rumore per le immagini da ultrasuoni e le tecniche di classificazione dei diversi tessuti (Cappellini, Dubini, 1981).

La tavola 20 A mostra un esempio di ecografia di fegato, con esaltazione dei livelli di grigio (ECHO-SCAN con scansione lineare delle OTE Biomedica, Firenze). La tavola 20 B mostra un altro esempio di ecografia di feto, con elaborazione di esaltazione, ove si vede chiaramente la testa con la "linea mediana" (ECHO-SCAN come sopra). La figura 14.3 rappresenta un esempio di registrazione dinamica (*time-motion*) con velocità di scorrimento di 50 mm/s in indagine ultrasonica cardiaca, con singolo tra-

[2] Esperienze con termografia IR (AGA Thermovision) e radiometria a microonde (radiometri SMA a varie frequenze) sono state effettuate in collaborazione dal Dipartimento di Ingegneria elettronica dell'Università e SMA s.p.a. di Firenze, utilizzando tecniche numeriche di filtraggio e correlazione (Prosperi, 1983).

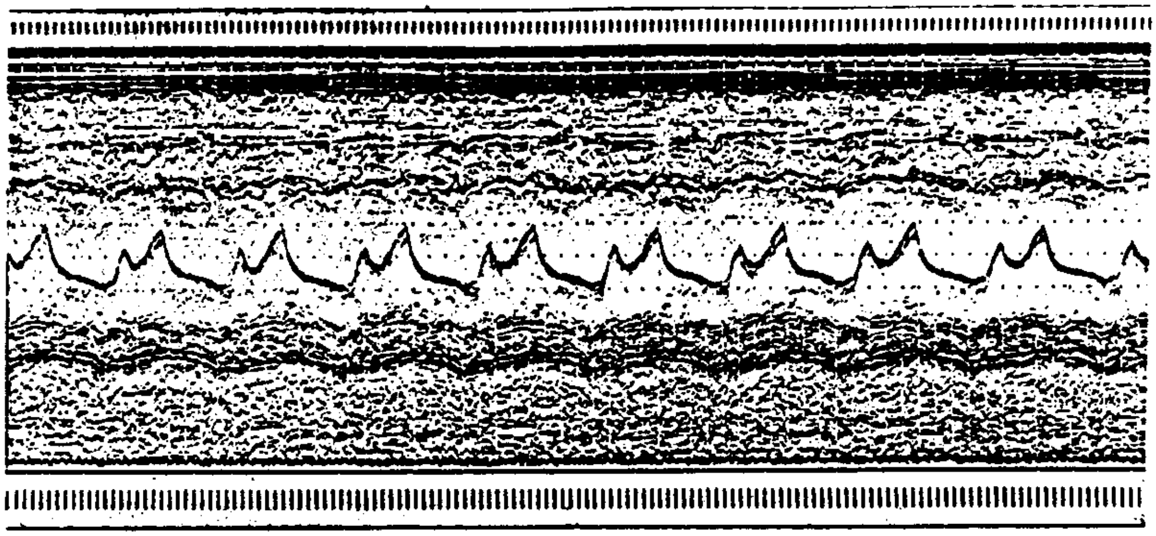


**Figura 14.3**
Esempio di registrazione dinamica (*time-motion*), con velocità di scorrimento di 50 mm/s, in indagine ultrasonica cardiaca.

sduttore poggiato sul torace, per indagine sulla valvola mitralica (ECHO-Processor, OTE Biomedica, Firenze).

Un sistema di acquisizione ed elaborazione numerica, appositamente realizzato per segnali ultrasonici, è mostrato nella figura 14.4: si ha una conversione in forma numerica con 20 Mcampioni/s ($4 \div 8$ bit), una memoria *buffer* per memorizzare un'immagine acquisita (ad esempio $256 \cdot 256$ parole di 4 bit pari a 32 kbyte), un microprocessore NOVA 3/12 con memoria di 64 kbyte e *floppy disk*, collegato anche a un calcolatore più grande (Eclipse S-200), un convertitore da forma numerica ad analogica (CNA) con possibilità di presentazione su monitor TV o registrazione su nastro magnetico. Il sistema può effettuare diverse elaborazioni numeriche:

– pre-elaborazione sui dati acquisiti per la costruzione dell'immagine a ultrasuoni, con elaborazione di singole linee di vista (filtraggio passa-banda, compensazione del guadagno, compressione della dinamica di ampiezza, filtraggio inverso ecc.);
– elaborazione dell'immagine per migliorarne la qualità (esaltazione dei contrasti, estrazione dei contorni, filtraggio numerico 2D, interpolazioni, ridistribuzione dei livelli di grigio, sottrazione del fondo ecc.);
– estrazione di informazioni di interesse clinico (valutazione numerica di parametri e visualizzazione di particolari sezioni dell'immagine).

In particolare, nel caso di organi in movimento (come il cuore), dopo avere estratto le parti in movimento dell'immagine, possono essere valutati alcuni parametri morfologici e dinamici (Emiliani, Lotti, Masotti, 1979). La figura 14.5 mostra un esempio di acquisizione di segnali ultrasonici cardiaci per ricavare i parametri di moto della valvola mitralica misurando l'effetto Doppler con un'analisi spettrale (i segnali sono

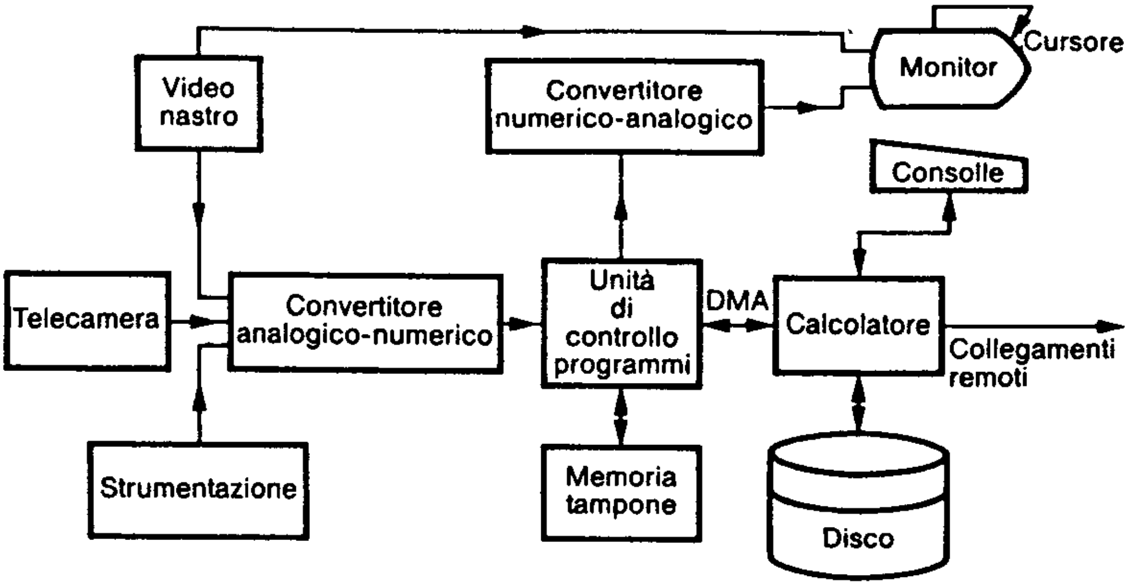



**Figura 14.4**
Schema a blocchi di sistema di acquisizione ed elaborazione numerica di segnali ultrasonici per analisi, miglioramento di qualità ed estrazione di parametri (IROE-CNR, Firenze).

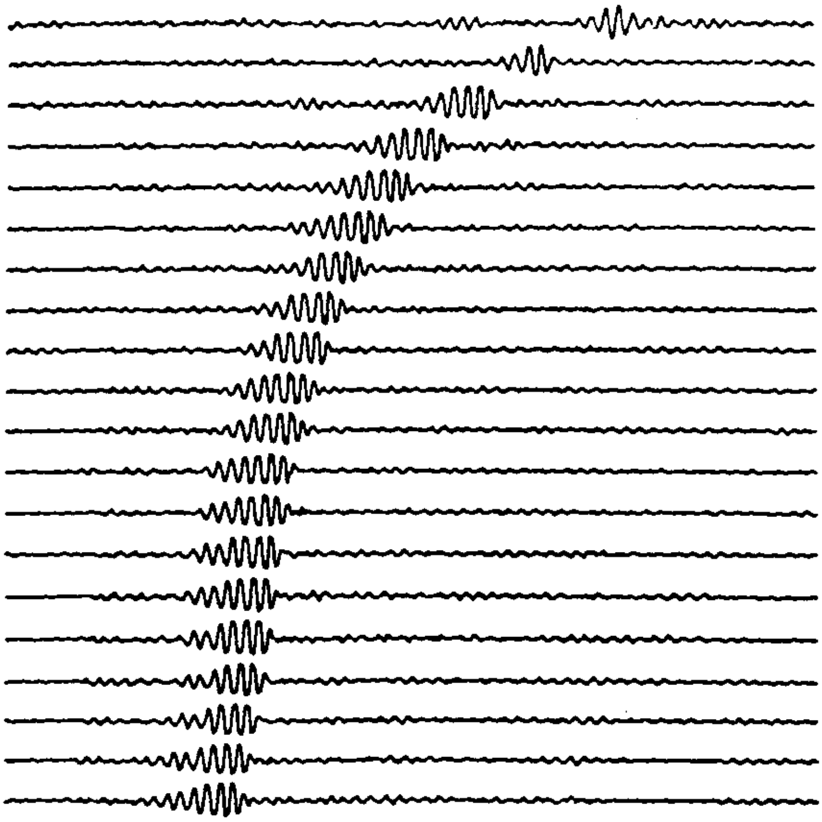


**Figura 14.5**
Presentazione grafica dell'evoluzione nel tempo dell'eco ultrasonica di una valvola mitralica, acquisita in tempo reale (per mezzo del sistema di fig. 14.4): ogni traccia comprende 512 campioni e il ritardo tra una traccia e l'altra è pari a 15 ms.

acquisiti in tempo reale con frequenza di campionamento di 16 MHz e quantizzazione a 8 bit).

## 14.7 Mappe di potenziali

Nell'analisi di ECG (elettrocardiogrammi) e di EEG (elettroencefalogrammi), si è passati, negli ultimi anni, dal rilievo dei potenziali in pochi punti anche al rilievo in molti punti (sul torace, sulla superficie cranica) distanziati in modo regolare (in genere su maglia quadrata). L'interesse di quest'analisi multipla è legata a diversi aspetti.

La disponibilità dei potenziali in molti punti, disposti su maglia quadrata, rappresenta in effetti un campionamento spaziale della superficie esaminata, con la possibilità quindi di avere un'informazione completa sullo stato elettrico della superficie stessa.

La mappa di potenziali e le sue variazioni dinamiche nel tempo permettono di effettuare valutazioni cliniche e diagnosi assai più significative dal punto di vista informativo di quanto sia possibile con l'analisi di singoli tracciati ECG o EEG.

Le mappe di campioni di potenziale, infine, possono essere facilmente convertite in forma numerica e quindi trattate con le diverse tecniche di elaborazione numerica, per migliorare la qualità dei dati, ridurne la quantità (compressione) e ottenere presentazioni finali globali più significative e utili dal punto di vista clinico (Cottini e altri, 1972; Gatti, Padovini, 1981).

Un interessante sistema completo di acquisizione, conversione in forma numerica ed elaborazione di mappe di potenziali ECG (e anche EEG) è stato realizzato negli ultimi anni nell'ambito del Progetto finalizzato "Tecnologie biomediche" del Consiglio Nazionale delle Ricerche: il sistema, nell'applicazione all'analisi dei segnali ECG, utilizza in una configurazione tipica 240 elettrodi (misure di potenziali) con un opportuno "giubbotto" aderente al torace, acquisisce e converte in forma numerica tali potenziali, effettua pre-elaborazioni di filtraggio numerico, riduce la quantità dei dati campionati e presenta su schermo le mappe dei potenziali con linee equipotenziali, seguendone l'evoluzione nel tempo, con estrazione di parametri caratteristici di interesse clinico (Dotti e altri, 1977). La sua ormai estesa sperimentazione ne ha confermato le utilissime proprietà di diagnosi delle affezioni cardiache.

Esempi di mappe di potenziali EEG, acquisiti fuori-linea e pre-elaborati con il sistema S-2 (estrazione del ritmo $\alpha$ su 10 Hz), sono mostrati nella tavola 21 (Cappellini e altri, 1977).

## 14.8 Immagini tomografiche

Uno sviluppo recente di grande interesse e utilità nella diagnosi clinica è rappresentato dalla cosiddetta tomografia computerizzata (TC) o tomografia assiale compute-

rizzata (TAC). Mentre nella radiografia a raggi X standard (§ 14.4) una struttura o parte tridimensionale (3D) del corpo umano viene irradiata con un fascio di raggi X paralleli e si raccoglie su lastra o su pellicola l'intensità della radiazione emergente dalla parte opposta, nella tomografia computerizzata vengono effettuate più analisi ruotando il fascio di raggi X in modo da attraversare più volte la parte del corpo di interesse e raccogliere le corrispondenti intensità di radiazione emergenti.

La struttura schematica di un sistema TAC di base, quale originariamente sviluppato, è mostrata nella figura 14.6 (Hounsfield, 1973). Un sistema mobile di scansione, comprendente la sorgente di raggi X, i collimatori e i rivelatori, ruota intorno alla parte del paziente (ad esempio testa) da esaminare, effettuando molte (180) analisi e rilevamenti (uno per ogni grado) della radiazione emergente in ogni posizione. Questi rilevamenti (di solito 200÷300 valori forniti dai rivelatori per ogni posizione o passo di rotazione) sono inviati a un calcolatore, assieme all'uscita da un rivelatore di riferimento, che li acquisisce e li memorizza. Attraverso opportuni programmi di ricostruzione vengono utilizzati i dati precedenti per ottenere la struttura interna della sezione trasversale della parte del corpo analizzata: in sostanza viene ricostruita un'immagine 2D dalle 180 proiezioni o rilevamenti 1D.

Le tecniche numeriche di ricostruzione costituiscono una parte fondamentale del funzionamento del sistema: alla loro minore o maggiore efficienza è legata la qualità (risoluzione spaziale dei dettagli e discriminazione delle diverse strutture presenti) dell'immagine ricostruita. Per indicare come può avvenire, in un primo modo semplice, la ricostruzione, si immagini di avere 200 valori forniti dai rivelatori a ogni passo di rotazione: ognuno di tali valori venga suddiviso in modo uniforme per tutti i pixel incontrati dal fascetto di raggi X corrispondente. Si ripeta tale operazione per tutte le 180 posizioni. Ogni pixel avrà un livello globale (somma dei valori parziali precedenti)

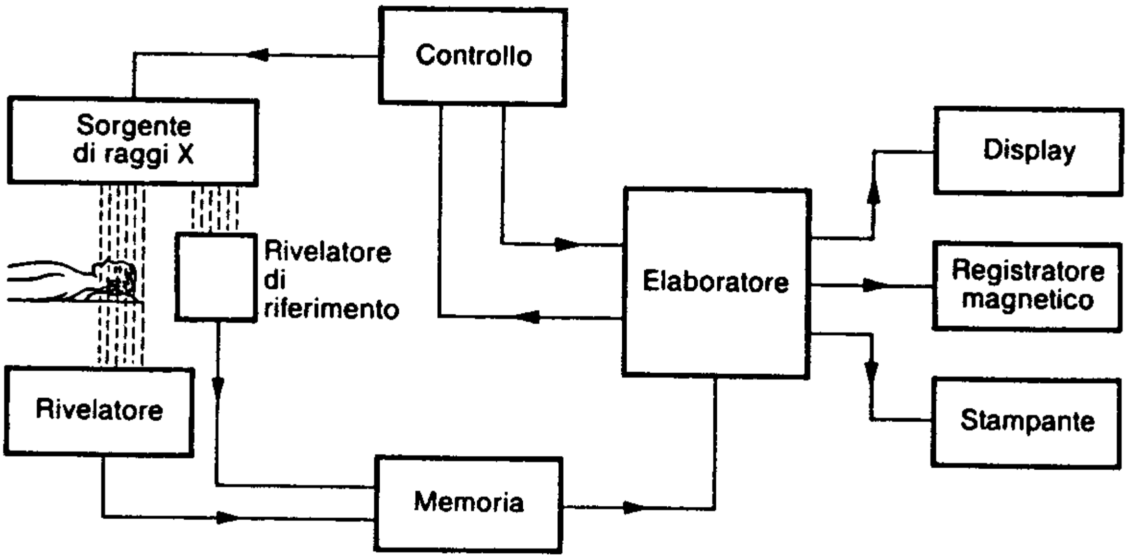



**Figura 14.6**
**Struttura schematica di un sistema di tomografia assiale computerizzata (TAC).**

in genere diverso da quello degli altri adiacenti, in relazione ai valori rivelati per i 180 fascetti di raggi che lo hanno attraversato. Le immagini ricostruite con questo semplice procedimento sono in genere di modesta qualità. Tale qualità può essere migliorata con opportune correzioni o con l'applicazione di coefficienti peso. In pratica, l'operazione di ricostruzione viene effettuata mediante l'uso di filtraggio numerico o di trasformata di Fourier veloce (FFT) (Cappellini, Constantinides, Emiliani, 1978): si ottiene una mappa in pochi secondi.

Esempi di immagini tomografiche sono mostrati nella tavola 22A. E' interessante osservare che opportune elaborazioni numeriche 2D sull'immagine tomografica possono ulteriormente migliorarne la qualità, evidenziando le strutture. Ciò è mostrato dalle immagini a destra, ove è stato applicato alle immagini precedenti un filtro numerico spazialmente variante (vedi cap. 1) (Garibotto, Micca, 1981): si vede chiaramente l'effetto di aumento dei contrasti che fa risaltare le strutture.

Sono stati sperimentati e sviluppati tomografi operanti anche con radiazioni diverse dai raggi X, in particolare con raggi gamma emessi da radioisotopi posti all'interno dell'organismo umano (Bellini e altri, 1980).

Sono allo studio e in fase di sperimentazione anche tomografi con ultrasuoni e microonde, il cui sviluppo (estremamente interessante dato che tali radiazioni sono non invasive) è però legato alla messa a punto di adatti sorgenti e rivelatori, ma soprattutto di opportune tecniche ad alta efficienza per la ricostruzione numerica (a causa delle proprietà molto più complesse di propagazione attraverso i tessuti degli ultrasuoni e delle microonde, per i diversi effetti di riflessione, diffusione e *scattering*) (Forgues e altri, 1980).

## 14.9 Analisi tridimensionali

Si tende a effettuare indagini diagnostiche dei tipi precedentemente indicati anche a tre dimensioni (3D), utilizzando immagini o mappe di organi in sezioni successive (ad esempio, mediante indagine tomografica).

Un esempio di analisi 3D sulla massa cerebrale, con alcune sezioni, è mostrato nella tavola 22B, per un caso di neurochirurgia assistita da calcolatore (Garibotto e altri, 1981).

Un altro esempio (ottenuto con il sistema S-2, cap. 11) è mostrato nelle tavole 23, 24, nelle quali sono riportate due sezioni tomografiche (inferiore e superiore); nella tavola 25 sono mostrate 32 sezioni intermedie del particolare alla base del naso, ottenute con interpolazione numerica 3D (Melani, 1983).

## Riferimenti bibliografici

Baroni M., Valli G., Pierotti O., *Digital Processing of Angiocardiograhic Images*, in "Proc. II Medit. Conf. on Med. Biol. Eng." (Marsiglia 1980).

Baroncelli L., Del Bimbo A., Zappa G., *Two-dimensional Kalman Filtering with Applications to the Restoration of Scintigraphic Images*, in Cappellini V., Constantinides A. G. (a cura di), "Digital Signal Processing", 183-96 (Academic Press, Londra e New York 1980).

Bellini S., Cafforio C., Piacentini M., Rocca F., *Design of a Computerized Emission Tomographic System*, in Cappellini V., Constantinides A. G. (a cura di), "Digital Signal Processing", 207-16 (Academic Press, Londra e New York 1980).

Cappellini V., *Tecniche di filtraggio digitale per immagini bidimensionali*, in "Atti del Convegno su tecniche di elaborazione di immagini di interesse clinico", 42-52 (Pavia 1977).

– Constantinides A. G., Emiliani P., *Digital Filters and Their Applications* (Academic Press, Londra e New York 1978).

– Del Re E., Emiliani P. L., Martinelli P., Roma V., Sferlazzo R., *Un nuovo sistema per la analisi ed elaborazione di segnali EEG*, in "Atti Riunione annuale AEI", 1.35 (AEI, Milano 1977).

– Dubini S., *Tecniche di elaborazione numerica delle bioimmagini*, Automazione e Strumentazione, vol. 29, 572-82 (1981).

Casini A., Castellini G., Emiliani P. L., Locchi F., Lotti F., *Two-dimensional Digital Filters for Nuclear Medicine Scintigraphies*, in "Proceedings Florence Conference on Digital Signal Processing", 187-95 (Firenze 1975).

Cottini C., Dotti D., Gatti E., Taccardi B., *Acquisizione di elettromappe per usi clinici*, Alta Frequenza, vol. 41, 988-1005 (1972).

Dotti D., Galligani I., Gatti E., Macchi E., Pizzolati P. L., Taccardi B., *Automatic Recording of Electromaps for Clinical Use and Physiological Research*, in "Proceedings of European Conference on Electrotechnics", 3/7, Sect. 4, 321-25 (Venezia 1977).

Emiliani P. L., Lotti F., Masotti L., *Some Aspects of Digital Signal Processing Applied to Moving Organ Sonography*, in Hill C. R., Alvisi A. (a cura di), "Investigative Ultrasonology: Technical Advances", 65-70 (Pitman Medical, 1979).

Forgues P. M., Goldbang M., Smith A., Stuchly S. S., *Medical Computed Tomography Using Microwaves*, IEEE 1980 Frontiers of Engineering in Health Care, 270-74 (1980).

Garibotto G., Garozzo S., Micca G., *Tecniche di elaborazione numerica di radiografie*, Elettronica e Telecomunicazioni, CESLT, N. 1, 27-33 (1981).

– Micca G., *Image Processing Through a Two-component Model*, Signal Processing, N. 3, 241-46 (1981).

– e altri, *Three-dimensional Digital Signal Processing in Neurosurgical Applications*, Proc. Intern. Conf. on Digital Signal Processing (Firenze 1981).

Gatti E., Padovini G., *Elaborazione dei segnali di interesse biomedico*, L'Elettrotecnica, vol. 68, N. 1, 9-27 (1981).

Hounsfield G. N., *Computerized Transverse Axial Scanning Tomography. Part I: Description of the System*, British Journ. Radiology, vol. 46, 1016-22 (1973).

Melani M., *Elaborazione numerica di immagini tomografiche: filtraggio a due dimensioni*, Tesi di laurea in Ingegneria elettronica, Università di Firenze (luglio 1983).

Prosperi E., *Esperienze di radiometria infrarosso e a microonde*, Tesi di laurea in Ingegneria elettronica, Università di Firenze (luglio 1983).

Robert J., Edrich J., Leroy Y., Mamouni A., Escanye J. M., Thouvenot P., *Clinical Applications of Microwave Thermography*, Journal of Optics and Photonics Applied to Medicine, vol. 211, 149-53 (1980).

Valli G., Mariani L., Baroni M., *Structure Detection on Vascular Contrast Images*, in "Proceedings of International Conference on Digital Signal Processing", 594-99 (Firenze 1981).

# Capitolo 15

# Applicazioni al telerilevamento aerospaziale delle risorse terrestri

## 15.1 Introduzione

Il rapido incremento della popolazione terrestre, il consumo sempre più elevato di alimenti e materie prime, il persistente e spesso non razionale sfruttamento delle risorse naturali, l'inadeguatezza dei piani di sviluppo a medio e lungo termine rappresentano problemi attuali estremamente gravi per l'umanità intera.

Per affrontare questi problemi ed in particolare per avviare uno sviluppo efficiente dell'agricoltura, indispensabile per eliminare la fame nel mondo, per effettuare la ricerca di materie prime e di nuove sorgenti di energia, per definire un razionale assetto del territorio e infine per difendere l'uomo e l'ambiente naturale dalle molteplici fonti di inquinamento, ha acquistato negli ultimi anni interesse ed importanza crescente il cosiddetto telerilevamento (*remote sensing*) terrestre. Con questo termine s'intende riferirsi a un procedimento di misura, nel quale un sensore, posto più o meno lontano dalla superficie terrestre, consente di raccogliere informazioni su di essa utilizzando l'energia elettromagnetica emessa o riflessa dalla superficie stessa nella banda ottica, nell'infrarosso, nella banda delle microonde... (vedi anche cap. 2) (Cappellini, Fondelli, Greco, 1979).

Anche se è da molti anni che il rilevamento fotografico da aereo o da pallone viene usato in ambito civile e militare per la cartografia e per lo studio dell'assetto del territorio, è soprattutto negli ultimi tempi che, con l'avvento dei satelliti per le risorse terrestri, le tecniche di telerilevamento aerospaziale hanno avuto uno sviluppo straordinario, che è tuttora in atto. Un altro aspetto interessante dello sviluppo più recente delle tecniche di telerilevamento è rappresentato dall'introduzione di sensori e di strumenti di telerilevamento di nuovo tipo non solo nella banda ottica e del vicino infrarosso, ma anche nella gamma delle microonde e delle alte frequenze.

Qui di seguito, dopo un sintetico richiamo ai sensori e strumenti di telerilevamento, sono esaminate le applicazioni delle tecniche di elaborazione numerica ai segnali e immagini di telerilevamento dalle quali dipende in definitiva molto spesso la loro effettiva utilizzazione pratica.

## 15.2 Segnali e immagini da sensori e strumenti di telerilevamento

I diversi sensori e strumenti di telerilevamento (in particolare da aereo, pallone e satellite) sono basati sull'interazione della radiazione elettromagnetica con le caratteristiche strutturali (rispetto alla lunghezza d'onda) della superficie terrestre. Lo spettro utilizzabile può estendersi da una lunghezza d'onda di 200 nm (ultravioletto) fino alla regione delle microonde e delle alte frequenze (fig. 15.1) (Cappellini, 1980).

I sensori e gli strumenti di telerilevamento possono essere raggruppati in due metodi principali: metodi passivi e metodi attivi (tab. 15.1).

I metodi passivi si basano sui seguenti princìpi: rilevazione della radiazione solare (350 ÷ 3500 nm) riflessa o diffusa dalla superficie terrestre; rilevazione della radiazione termica (4000 nm ÷ microonde) emessa dalla superficie in esame. Fra i più importanti sensori di questo tipo vi sono: macchine fotografiche, sistemi televisivi, sensori e analizzatori multispettrali in banda ottica e finestre spettrali vicine, rilevatori termici, sistemi a microonde (radiometri) (vedi anche cap. 2).

I metodi attivi si basano su sorgenti artificiali, come il radar e il laser, che emettono radiazioni di lunghezza d'onda controllata con intensità opportuna e analizzano le proprietà dei segnali riflessi e "diffusi" dagli oggetti e dalle superfici illuminate. Sono stati, in particolare, sviluppati i radar a visione laterale (SLR) (vedi cap. 2).

I metodi attivi e passivi impiegati nel campo delle microonde o delle alte frequenze,

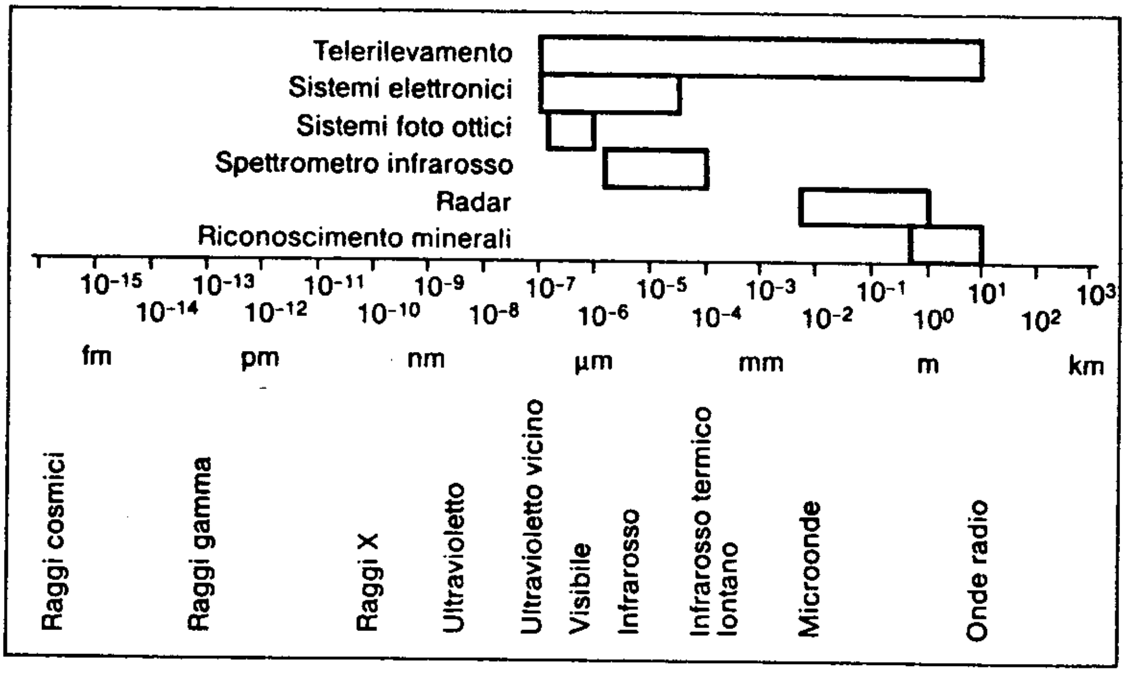



**Figura 15.1**
Lo spettro di radiazioni utilizzabile per il telerilevamento; sono indicate le finestre spettrali relative ad alcuni sensori e strumenti di telerilevamento.

Tabella 15.1 Principali tecniche di telerilevamento e relativi sensori

| Metodo e sensore | Banda spettrale | Campo angolare | Risoluzione angolare o a terra |
|---|---|---|---|
| PASSIVO | | | |
| macchina da presa fotografica | visibile - vicino infrarosso | 120° | 0,1 mrad |
| camere TV da satellite | visibile - vicino infrarosso | 10° | 0,02 mrad |
| analizzatore infrarosso | 3000-14000 nm | 120° | 3 mrad |
| analizzatore multispettrale (MSS) | 400-14000 nm | | |
| da aereo | | 120° | 2,5 mrad |
| da satellite | | 10° | 0,05 mrad |
| radiometro a microonde | 1-80 GHz | 180° | 10 mrad |
| ATTIVO | | | |
| radar ad apertura sintetica (SLAR) | 1-30 GHz | 60° per parte | 15 m |
| analizzatore laser | visibile - infrarosso | 180° | 1 ÷ 10 mrad |

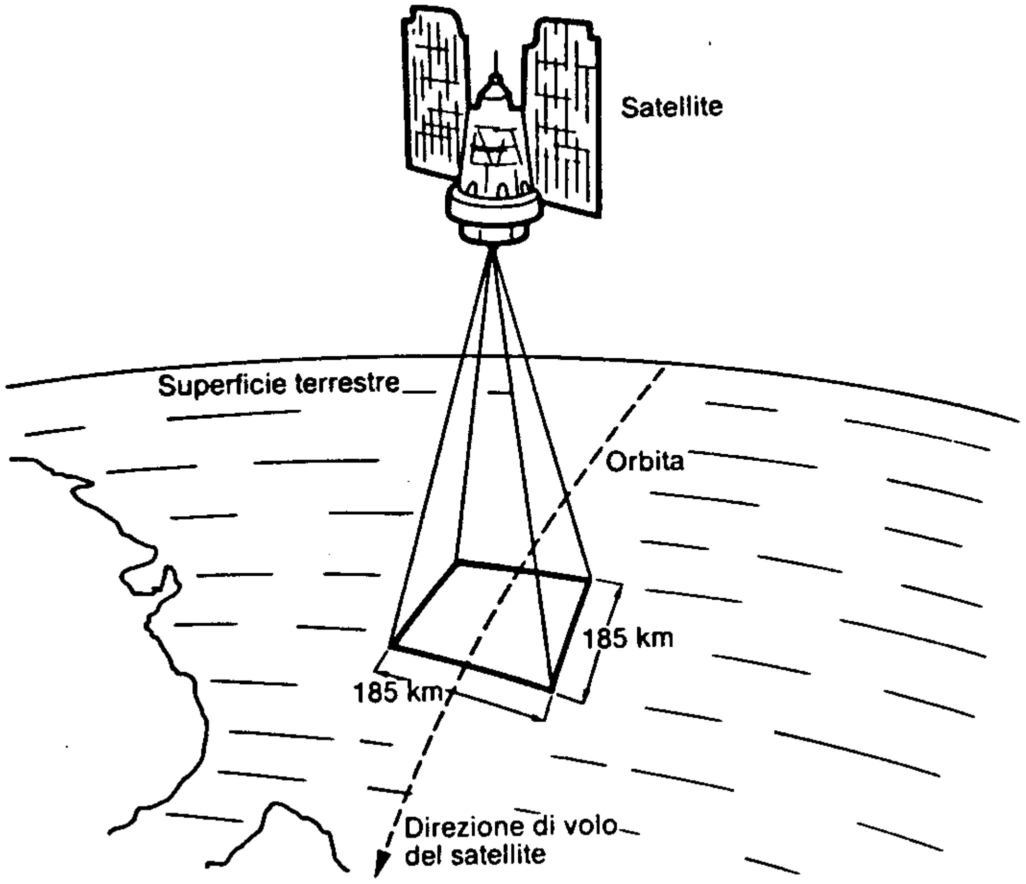



Figura 15.2
Illustrazione schematica della "ripresa" da un satellite del tipo LANDSAT, con indicazione della zona della superficie terrestre (tratteggiata) di cui viene fornita – in sequenza nel tempo – un'immagine.

quali i radiometri e i radar, hanno il vantaggio, rispetto ai sistemi ottici, di non risentire delle condizioni avverse di visibilità (oscurità, nubi, foschia).

Tutti i sensori e gli strumenti precedenti forniscono in definitiva, del territorio osservato, immagini o mappe, che contengono una grande quantità di dati spesso fra loro complementari: le informazioni raccolte dai diversi sensori si differenziano infatti sia per le finestre spettrali in cui operano, sia per la struttura fisica dei sensori stessi.

A titolo d'esempio, un satellite del tipo LANDSAT "rileva" tutta la terra (ad eccezione delle zone polari) con cadenza periodica (di periodo pari di solito a 18 giorni) fornendo una grande quantità di immagini, ciascuna relativa a una zona della superficie terrestre di 185 km X 185 km (fig. 15.2); il sensore multispettrale a scansione MSS a bordo fornisce di ogni zona 4 immagini (tre nel visibile e una nell'infrarosso prossimo). I dati relativi a queste immagini vengono registrati a bordo del satellite e trasmessi a terra a opportune stazioni di ricezione, a tempi determinati o su comando.

## 15.3 Elaborazione numerica dei dati di telerilevamento

Esprimendo le informazioni raccolte dai diversi sensori di telerilevamento mediante una rappresentazione binaria equivalente (nel caso di segnali e immagini continue ciò si ottiene, come già indicato nel cap. 3, con le operazioni di campionamento, quantizzazione e codifica binaria), si può avere una misura significativa della diversa "capacità" di raccolta di dati da parte dei vari sensori. La tabella 15.2 mostra, per una tipica "scena" osservata, il numero di bit raccolti da alcuni dei più importanti sensori sopra considerati. Dai valori riportati si vede chiaramente come il problema della quantità di dati da telerilevamento (fino a 288 Mbit per immagine) e il problema della velocità di raccolta di questi dati (fino a 300 Mbit/s) siano di notevole entità e pongano limiti severi alle possibilità di utilizzazione pratica dei dati stessi. A questo fine sono di grande interesse le tecniche di elaborazione numerica, esaminate nei precedenti capitoli, le più significative delle quali vengono sinteticamente richiamate qui di seguito, con l'indicazione della loro specifica utilizzazione (Cappellini, 1980).

*Correzioni*

Le operazioni di correzione, in genere necessarie per i dati di telerilevamento, possono essere distinte in due tipi: correzioni radiometriche per compensare differenze di sensibilità e di guadagno dei sensori nelle varie bande utilizzate; correzioni geometriche per correggere le distorsioni geometriche come i disallineamenti, le variazioni di altezza, gli effetti della curvatura della Terra ecc.

*Allineamento geografico*

Quest'operazione consiste nel determinare, per i punti dell'immagine telerilevata, le coordinate geografiche nel sistema di riferimento scelto. Una volta che questo allineamento geografico sia stato effettuato, è possibile confrontare immagini della stessa

Tabella 15.2 Capacità di raccolta dei dati da parte dei diversi sensori

| Sensore | Dati per immagine (bit) | Velocità di raccolta e acquisizione (Mbit/s) |
|---|---|---|
| TV bianco e nero | 1 × 600 × 800 × 8 | 100 |
| TV colori | 3 × 600 × 800 × 8 | 300 |
| RB-vidicon (tre bande) | 3 × 4000 × 4000 × 6 | 30 |
| Analizzatore multispettrale a scansione (MSS) (10 bande) | 10 × 1600 × 8 | 13 |
| Radar ad apertura sintetica (SLAR) | 4000 × 4 | 100 |

scena prese in tempi diversi o con sensori diversi, "integrando" così le diverse informazioni acquisite.

*Variazioni di scala*

Variazioni di scala di tipo lineare e non lineare sono spesso utili per espandere o comprimere determinate variazioni dei livelli di grigio (in particolare espansione di scala, § 6.3).

*Operazioni spaziali locali*

Fra le varie operazioni spaziali locali (vedi cap. 6), oltre alla variazione di scala sopra ricordata, sono di notevole interesse l'istogramma dei livelli di grigio, operazioni di media (per ridurre disturbi e rumore), operazioni 2 · 2 o 3 · 3 per estrarre i contorni.

*Filtraggio numerico*

Il filtraggio numerico 1D e 2D è utile per diversi scopi: con filtri numerici passa-banda o passa-alto si possono effettuare esaltazioni dei contrasti; con filtri derivatori si possono estrarre i contorni; con filtri passa-basso o di tipo inverso si può ridurre il rumore e i disturbi, migliorando la qualità delle immagini (ad esempio si possono ridurre gli effetti di foschia o di nubi nelle foto aeree, o ridurre disturbi localizzati o puntiformi nelle immagini da satelliti) (vedi cap. 7) (Cappellini, 1980).

*Compressione dei dati*

Fra i metodi più utili per le immagini di telerilevamento sono da considerare quelli del tipo a previsione o interpolazione, con codifiche adattive e con trasformazioni (Fourier, Walsh, Haar ecc.) veloci. La compressione ha già grande importanza, e ancor più ne avrà in futuro per ridurre la grande massa di dati "grezzi" che i sensori forniscono e che, così come stanno, non sono facilmente utilizzabili e memorizzabili (vedi cap. 8) (Cappellini, 1980).

*Riconoscimento di configurazioni*

Nell'analisi e interpretazione dei dati di telerilevamento, si mira in genere a estrarre determinate informazioni o configurazioni dal "contesto". Le tecniche di riconoscimento, in particolare del tipo a prototipi, sono già utilmente applicabili a tale scopo (vedi cap. 9).

*Trasformazioni geometriche*

L'allineamento geografico sopra indicato permette di riferire i dati telerilevati a un sistema di riferimento geografico. Per poter confrontare e integrare utilmente le diverse immagini dai sensori, è in genere anche necessario effettuare opportune trasformazioni geometriche sulle immagini stesse: rotazioni intorno a un punto, traslazioni, variazioni del punto di vista (ripresa dal sensore). Con queste trasformazioni, ed eventuali espansioni o contrazioni di scala spaziale, si può arrivare a "sovrapporre" immagini da sensori diversi o da piattaforme a diversa altezza di ripresa (Cappellini, Maracchi, 1980).

*Stereoscopia numerica*

Come nella stereoscopia analogica si può ottenere una visione tridimensionale del terreno utilizzando due riprese della stessa zona effettuate da due punti diversi, nella stereoscopia numerica si può ottenere lo stesso risultato (con maggiore precisione) convertendo in forma numerica le due riprese e applicando ad esse opportune trasformazioni geometriche e variazioni spaziali.

Nel seguito sono mostrati alcuni esempi di elaborazione numerica di immagini o mappe di telerilevamento da aereo e da satellite in alcuni dei molteplici settori di utilizzazione pratica (Cappellini, 1980).

## 15.4 Esempi di elaborazione numerica di immagini di telerilevamento in alcuni settori di utilizzazione pratica

Le applicazioni attuali o in fieri del telerilevamento alle risorse terrestri e più in generale alle risorse naturali sono numerose, come indica la tabella 15.3, e riguardano settori di grande importanza per la vita dell'uomo e per l'ambiente naturale: geologia e geofisica, agricoltura e foreste, sorveglianza ambientale, metrologia, idrologia e oceanografia, topografia e cartografia. Indichiamo di seguito alcuni esempi di elaborazione numerica di immagini di telerilevamento in tre di questi settori: agricoltura e foreste, idrologia e oceanografia, topografia e cartografia.

### 15.4.1 Agricoltura e foreste

In questo settore, il telerilevamento permette, con le tecniche di elaborazione numerica, una classificazione dei diversi terreni osservati (coltivati e incolti) e, per i

**Tabella 15.3** Applicazioni del telerilevamento

| | |
|---|---|
| Geologia e geofisica | – tettonica<br>– analisi delle acque<br>– rilevazione di anomalie varie<br>– misura della temperatura terrestre |
| Agricoltura e foreste | – determinazione delle colture<br>– classificazione delle aree coltivate<br>– determinazione dei danni (da temporali, grandine, incendi, parassiti) |
| Meteorologia | – analisi della formazione delle nuvole<br>– determinazione della direzione del vento<br>– determinazione dei profili di temperatura<br>– rilevamento di uragani |
| Idrologia e oceanografia | – sorveglianza di risorse idriche (volume di neve, ghiaccio, acque naturali e artificiali, acqua potabile)<br>– rilevamento di sorgenti idriche<br>– indagini marine (sedimenti, maree, correnti marine, temperatura, inquinamento, altezza delle onde) |
| Sorveglianza ambientale | – classificazione delle diverse aree territoriali (residenziali, industriali, agricole)<br>– analisi del traffico (strade, ponti)<br>– analisi del clima<br>– determinazione dell'inquinamento ambientale (polveri, residui liquidi, residui solidi)<br>– costruzione di oleodotti |
| Topografia e cartografia | – rilevamento del terreno<br>– carte (produzione di ortofoto, mappe topografiche e tematiche, creazione di banche di dati territoriali)<br>– analisi del terreno (pendenze, frane) |

terreni coltivati, il riconoscimento delle diverse colture (grano, riso, vigneti, uliveti, alberi da frutto...).

Nelle tavole 26, 27, 28 è mostrato un esempio di classificazione automatica di terreno agricolo (a sud di Firenze) mediante foto da aereo digitalizzate ed elaborate (presso il Centro di Calcolo dell'Università di Firenze) con elaboratori locali spaziali di due tipi: di filtraggio, per esaltare i contrasti e migliorare la qualità dei dati; di estrazione dei contorni (gradiente isotropico, vedi § 6.8). Vengono automaticamente distinte e classificate (riconoscimento a prototipi, costituiti da tre fasce di livelli di grigio; § 10.2) le aree relative al bosco (prima classe: livelli di grigio elevati), ai vigneti-uliveti (seconda classe: livelli di grigio intermedi) e ad altro terreno con colture diverse (terza classe: livelli di grigio bassi). Di ogni zona viene fornita automaticamente la superficie totale (contando il numero di pixel in ogni classe e moltiplicando tale numero per l'area elementare di un pixel) (Cappellini e altri, 1979).

Con foto aeree del tipo indicato o con immagini da satellite si possono effettuare (mediante elaborazioni numeriche più complesse delle precedenti) classificazioni in 10 e più componenti strutturali del territorio (in particolare colture agricole). Tale

classificazione è in genere più agevole con foto aeree rispetto a immagini da satellite, in quanto le prime hanno maggiore risoluzione spaziale (0,5 ÷ 1 m) delle seconde (60 ÷ 80 m).

Un esempio di classificazione automatica con sistema S-2 su immagine da satellite per zone forestali dell'Abetone è mostrato nelle tavole 29, 30. Sono utilizzate immagini LANDSAT (risoluzione circa 80 m) dell'agosto 1979 e del dicembre 1979 nelle bande MSS4 e MSS5 del visibile. La tecnica utilizzata, detta TEMUC (*temporal multispectral clustering*), tiene conto appunto delle variazioni nel tempo delle zone boschive osservate (piante sempre verdi, piante caducifoglie); tali variazioni vengono messe in evidenza mediante "sovrapposizione" numerica delle immagini di stagioni diverse. Le diversità fra versanti in ombra e al sole sono compensate mediante equalizzazione dei livelli di grigio delle diverse immagini (ridistribuzione dei livelli di grigio in modo da avere istogrammi opportuni corrispondenti a riduzione dell'effetto delle ombre), ottenendo l'immagine equalizzata di tavola 29. Il risultato della classificazione è mostrato nella tavola 30. Dal confronto di questa mappa, ottenuta automaticamente, con rilievi diretti a terra ("verità a terra"), si deduce che la classe indicata con valore 100 corrisponde a una struttura vegetale di caducifoglie molto omogenea, che in effetti è una faggeta; la classe individuata dal valore 170 rappresenta un bosco misto; la classe con il valore 24 rappresenta abetine e la classe con 255 rappresenta fossi e canali (Cappellini e altri, 1981).

Un altro esempio, ottenuto con la stessa tecnica di classificazione TEMUC, relativamente a una zona vicino a Migliarino, a sud del lago di Massaciuccoli, utilizzando immagini LANDSAT del maggio, agosto, settembre e dicembre 1979, è mostrato nella tavola 31: come si può osservare, sono distinte 8 classi nella parte di territorio analizzata (circa 1100 ettari) (Conese, Maracchi, Miglietta, 1982).

Informazioni utili sullo stato della vegetazione possono essere ottenute, oltre che con le foto da aereo o con immagini MSS da satellite, da rilevamenti mediante camere termiche (del tipo AGA Thermovision), radiometri a microonde e radar SLR.

Un esempio di rilevamento da piattaforma a terra con radiometro a microonde (SMA, Firenze) è mostrato nella tavola 32: in alto è mostrata la foto della "scena" rilevata vicino a Firenze, mentre in basso è mostrata la mappa ottenuta con il radiometro a microonde, nella quale sono state effettuate elaborazioni di esaltazione dei contrasti. Come si vede dal confronto, viene messo in chiaro risalto il diverso "stato termico" delle varie strutture rilevate, e in particolare della vegetazione (si nota la diversa temperatura degli alberi rispetto al terreno con erba e rispetto allo sfondo del cielo).

Un altro esempio di rilevamento da piattaforma mobile in alto su terreno sottostante, effettuato mediante un radar con visione laterale (SMA, Firenze), relativo a una zona sulle pendici del Monte Morello verso Firenze, è mostrato nella tavola 33: le strutture a distanze diverse corrispondono a vegetazioni diverse sulle pendici del monte (elaborazione con sistema S-2).

Una mappa da radar SLR su satellite (SEASAT), relativa a una zona montuosa della Calabria, presentata in falso colore con esaltazione dei contrasti, è riportata

nella tavola 34. Le zone di luce e di ombra sono relative alla radiazione elettromagnetica emessa dal radar, non coincidente con le normali ombre della luce solare (di ciò occorre tenere debito conto nelle correlazioni e nei confronti con mappe e immagini, ad esempio del tipo MSS da LANDSAT) (elaborazione con sistema S-2).

Con immagini di telerilevamento del tipo sopra indicato si possono anche rilevare "anomalie" della vegetazione (malattie, effetti della grandine ecc.) in modo da stabilire gli interventi più idonei nelle diverse situazioni. Si può anche arrivare a prevedere i raccolti (dal grado e dallo stato di sviluppo e di maturazione delle piante), il che può permettere un'opportuna pianificazione dell'uso degli alimenti primari.

### 15.4.2 Idrologia e oceanografia

Per quanto riguarda l'idrologia, si possono effettuare valutazioni globali e particolari sulle superfici ricoperte d'acqua (laghi, fiumi, paludi), valutare il grado di umidità del suolo, classificare le acque in base alla temperatura o allo stato di inquinamento (Cappellini, 1980).

Un esempio di valutazione, mediante immagini LANDSAT, del grado relativo di umidità e della superficie idrica (acque scoperte), lungo un tratto di costa tirrenica vicino alla foce dell'Arno, è mostrato nella tavola 35 (della stessa zona sono state mostrate nel cap. 6, fig. 6.3, due immagini del 1975 con relativi istogrammi). Più esattamente, la tavola 35A mostra l'immagine nella banda 6, del 1978, con esaltazione dei contrasti, relativa a una valutazione globale, mentre la tavola 35B mette in evidenza le acque scoperte, mediante estrazione di una classe di livelli di grigio (Cappellini e altri, 1979).

Combinando le informazioni fornite dalle diverse bande dei sensori multispettrali MSS da satellite, è anche possibile avere indicazioni sulla quantità di neve in fusione: ciò, insieme con misure dirette o stime dello spessore della coltre nevosa e della pendenza dei versanti, "integrate" con le precedenti, può portare a una "previsione automatica" del flusso idrico prodotto dallo scioglimento delle nevi (esperienze di questo tipo, con apposite elaborazioni integrate, sono state fatte in Canada, Norvegia e Svizzera).

Per quanto riguarda i mari e gli oceani, le immagini di telerilevamento precedenti possono fornire informazioni utili sulle correnti marine, sullo stato di inquinamento (specialmente lungo le coste), sul moto ondoso ecc. Un esempio di immagine LANDSAT, relativa alla costa adriatica (zona dell'Abruzzo), ripresa nell'aprile 1978, elaborata con trasformazione di Karhunen-Loeve, è mostrata nella tavola 36: in effetti viene mostrata l'immagine ricostruita utilizzando solo la prima componente della trasformazione. Nella zona marina sono discriminati chiaramente livelli diversi di torbidità (trasparenza diversa) e messe in evidenza le diverse concentrazioni di sedimenti.

### 15.4.3 Topografia e cartografia

Le foto da aereo e le immagini da satellite possono essere utilizzate per produzione automatica di mappe topografiche e cartografiche in scale diverse, in relazione alla loro risoluzione spaziale (precisione di rilevamento del sensore utilizzato, altezza della piattaforma di ripresa).

Le elaborazioni numeriche utili a questo fine sono essenzialmente le seguenti:

– esaltazione dei contrasti e riduzione di disturbi eventuali per ottenere immagini di qualità migliore;
– trasformazioni geometriche delle immagini di telerilevamento per variare la posizione, il punto di vista, per effettuare espansioni o contrazioni di scala spaziale, al fine di potere riferire le immagini a punti geografici di posizione nota, o potere confrontare dati su immagini diverse;
– estrazione dei contorni.

Un esempio di elaborazione automatica su foto da aereo (parte della città di Livorno) è mostrato nelle tavole 37, 38: nella tavola 37 si può osservare, a sinistra, l'acquisizione della foto da parte del sistema (ripresentazione al monitor del sistema S-2 della foto ricostruita dai campioni), mentre a destra è iniziata una prima elaborazione di rinforzamento dei bordi delle varie strutture (case, canali, strade ecc.); nella tavola 38 si vede in alto l'espansione di una certa fascia dei livelli di grigio con i contorni di una parte della foto; in basso, infine, si ha la presenzazione dei contorni di tutte le strutture, che rappresenta una planimetria completa della parte elaborata.

Un altro esempio di estrazione di elementi strutturali topografici da un rilevamento da piattaforma aerea di una zona agreste in Toscana è mostrato nelle tavole 39, 40; la prima mostra la presentazione al monitor della foto acquisita (sistema S-2); la seconda riporta l'estrazione automatica degli elementi strutturali effettuata mediante una tecnica diversa dalla precedente, cioè l'impiego di un filtro numerico 2D FIR passa-alto (vedi § 7.3) invece di operatori locali spaziali.

Un esempio di uso di trasformazioni geometriche su immagini da satellite LANDSAT per effettuare rotazioni ed espansioni spaziali di alcune parti dell'immagine, in modo da allinearle con altri rilevamenti topografici o con riferimenti cartografici esistenti, è mostrato nelle tavole 41, 42 per la ripresa di una zona vicino a Firenze (Cappellini, Conese, 1981).

## 15.5 Confronto e correlazione fra immagini di telerilevamento da sensori con diversa risoluzione spaziale

Un problema pratico di grande interesse attuale è rappresentato dal confronto e dalla correlazione fra immagini di telerilevamento da sensori con diversa risoluzione spaziale a terra, in particolare per ottenere "mappe integrate" a più alto contenuto informativo.

E' stato già indicato (§ 15.3) come si possano effettuare operazioni di "allineamento geografico" e impiegare trasformazioni geometriche per ruotare e traslare immagini, e nella tavola 36 è stato mostrato un esempio di rotazione ed espansione su un'immagine LANDSAT. Consideriamo di seguito alcuni metodi che possono portare a un effettivo confronto e correlazione fra due immagini a diversa risoluzione spaziale, utili per le applicazioni già indicate (§ 15.4).

Indichiamo con $f_1(n_1, n_2)$ e $f_2(n_1, n_2)$ due immagini di telerilevamento: la prima con alta risoluzione a terra e passo di campionamento spaziale $X_1$ (lato di un pixel a terra), la seconda con risoluzione più bassa e passo di campionamento spaziale $X_2 > X_1$. Ciò vuol dire che, se $m=(X_2/X_1)$, a un pixel dell'immagine $f_2(n_1, n_2)$ corrispondono $m^2$ pixel dell'immagine $f_1(n_1, n_2)$.

Un primo metodo per ottenere, dall'immagine $f_1(n_1, n_2)$ ad alta risoluzione, un'immagine $g_1(n_1, n_2)$ avente lo stesso passo di campionamento spaziale $X_2$ dell'immagine a bassa risoluzione, consiste nell'effettuare una media pesata del seguente tipo:

$$g_1(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} \sum_{k_2=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} w(k_1, k_2) f_1(n_1-k_1, n_2-k_2) \qquad [15.1]$$

ove i coefficienti "peso" $w(k_1, k_2)$ definiscono il tipo di *smoothing* che viene effettuato sui dati $f_1(n_1, n_2)$. Se $w(k_1, k_2)=1/m^2$, si ha ad esempio la semplice media aritmetica. In genere si preferisce dare un maggior peso ai pixel centrali della sottoimmagine $m \cdot m$ di $f_1(n_1, n_2)$: per $w(k_1, k_2)$ possono così essere utilizzate funzioni lineari o coniche o di tipo gaussiano.

Un secondo metodo rigoroso corrisponde a effettuare un filtraggio numerico 2D passa-basso a simmetria circolare sull'immagine $f_1(n_1, n_2)$ con una frequenza di taglio $\nu_c = \omega_c/2\pi = 1/(2X_2)$, ottenendo l'immagine filtrata $g_1(n_1, n_2)$, e quindi a ridurre o "decimare" i dati ottenuti $g_1(n_1, n_2)$ fino al passo di campionamento $X_2$, in modo da ottenere l'immagine finale $g_2(n_1, n_2)=g_1(n_1 X_2, n_2 X_2)$. Con queste operazioni si tolgono in effetti dallo spettro 2D dell'immagine $f_1(n_1, n_2)$ le frequenze spaziali maggiori di $\nu_c$, ottenendo perciò un'immagine che è direttamente confrontabile con quella a minore risoluzione spaziale (Cappellini, 1983).

Anche se con difficoltà assai maggiore (teoricamente il problema non è risolubile in modo esatto!) si può procedere anche in modo "inverso", per ottenere "stime" a più alta risoluzione da immagini a risoluzione limitata, in modo da confrontarle con altre aventi la stessa alta risoluzione. Si possono seguire le seguenti linee:

– effettuare un'interpolazione troncata alla Shannon (secondo il teorema del campionamento, § 3.2) sull'immagine a bassa risoluzione $f_2(n_1, n_2)$, per ottenere un'immagine continua $f_2(x, y)$; effettuare quindi un "ricampionamento" di quest'immagine $f_2(x, y)$ con un passo di campionamento uguale a $X_1$, ottenendo l'immagine campionata $g_2(n_1, n_2)$ avente la stessa risoluzione spaziale dell'immagine $f_1(n_1, n_2)$;

– effettuare un'"estrapolazione spettrale" sullo spettro dell'immagine a bassa risoluzione $f_2(n_1, n_2)$, estendendo (con funzioni di estrapolazione, continuità, stima

spettrale ecc.) lo spettro verso le alte frequenze, possibilmente vicino alle frequenze più elevate dell'immagine $f_1(n_1, n_2)$.

Un esempio sperimentale di confronto e correlazione fra immagine LANDSAT ($X_2 \cong 80$ m) e un'immagine SEASAT ($S_1 \cong 30$ m), utilizzando i precedenti metodi e in particolare il filtraggio numerico passa-basso, è mostrato nella tavola 43: si vedono le diverse forme di "mappe integrate" ottenibili (Baldini, 1983).

## 15.6 Considerazioni sull'uso delle varie tecniche di elaborazione per immagini di telerilevamento e simili

Come gli esempi precedenti indicano, per ottenere risultati utili (esaltazione di contrasti, estrazione di contorni, classificazioni) sono spesso sufficienti algoritmi di elaborazione abbastanza semplici (operatori locali spaziali, riconoscimento a pochi prototipi). Per certe applicazioni possono essere impiegati algoritmi un po' più complessi (filtri numerici 2D, riconoscimento con diversi prototipi e correlazioni fra rilevamenti diversi, trasformazioni geometriche ecc.).

Per la riduzione dei dati, che è di notevole interesse nel caso di grandi quantità di immagini, possono utilmente essere applicati gli algoritmi semplici di previsione-interpolazione (fattori di compressione di $2 \div 3$) o più complessi quali codifiche a lunghezza di parola variabile o uso di trasformazioni (rapporti di compressione di $2 \div 8$). Un esempio di applicazione della trasformata di Walsh (FWT) e codifica con lunghezza di parola variabile a immagine LANDSAT è mostrato nella tavola 44: si ottengono rapporti di compressione di $2 \div 4$ (cap. 8) (Cappellini, 1980).

Le tecniche precedenti possono essere anche applicate all'elaborazione di segnali e immagini di rilevamento di tipo diverso. Un esempio di elaborazione con filtri numerici ricorrenti di segnali sismici è mostrato nella figura 15.3 (Garibotto, 1979).

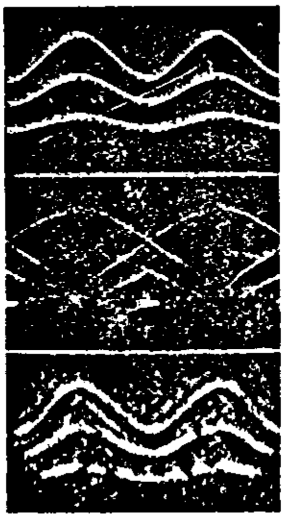


**Figura 15.3**
Esempio di elaborazione di segnali sismici.

Un altro settore di notevole importanza sul piano dell'indagine scientifica è rappresentato da quello dell'astronomia: le mappe astronomiche da telescopi ottici o da radiotelescopi possono essere elaborate con tecniche del tipo indicato, sia per migliorarne la qualità (esaltazione dei contrasti e soprattutto estrazione dal rumore), sia per estrarre caratteristiche significative strutturali relative ai vari corpi celesti e alla loro evoluzione nel tempo (con tecniche di ricostruzione e riconoscimento di forme di tipo più o meno complesso) (Cappellini, 1979).

## Riferimenti bibliografici

Baldini L., *Tecniche di elaborazione numerica per immagini di telerilevamento aventi diversa risoluzione spaziale*, Tesi di laurea di Ingegneria elettronica, Università di Firenze (luglio 1983).

Cappellini V., *Image Enhancement by Local Operators and Two-dimensional Filtering*, in "Proceedings of the International Workshop on Image Processing in Astronomy" (Trieste 1979).

– *Application of High Efficiency Data Compression and 2D Digital Filtering Techniques to Remote Sensing Data Processing*, Intern. Journal of Remote Sensing, vol. 1, N. 2, 175-80 (1980).

– *Elaborazione dei dati di telerilevamento: situazione attuale e prospettive future*, su invito, in "Atti del 27° Congresso Scientifico Internazionale per l'Elettronica" (Roma 1980).

– Muntoni F. e Valli F., *Alcune tecniche di elaborazione ad alta efficienza di dati di telerilevamento*, in "Atti del 27° Congresso Scientifico Internazionale per l'Elettronica" (Roma 1980).

– *Remote Sensing Systems for Water Resource Management and Agriculture Development*, in "Proceedings of the Third International Conference on System Approach for Development" (Rabat 1980).

– *Il telerilevamento aereo-spaziale delle risorse naturali*, Cultura e Scuola, N. 75, 207-25 (1980).

– *Digital Comparison and Correlation Techniques for Remote Sensing Images Having Different Space Resolution*, in "Proceedings of Seventh Intern. Symposium on Remote Sensing of Environment" (Ann Arbor 1983).

– Conese C., *Alcuni metodi di trasformazione geometrica e confronto per immagini di telerilevamento*, Rapporto dell'Istituto di Elettronica, Università di Firenze, R-3-81 (1981).

– Maracchi G., Miglietta F., *Un esempio di classificazione automatica applicata al rilevamento forestale*, Rapporto dell'Istituto di Analisi ambientale e Telerilevamento applicati all'agricoltura, CNR (1981).

– Fondelli M., Greco F., *Il telerilevamento nella gestione dell'ambiente*, Automazione e Strumentazione, vol. 27, N. 12, 861-84 (1979).

– Maracchi G. P., Muntoni F., Pampaloni P., Tagliaferri G., Tofani G., Vanni F., *Telerilevamento di aree campione mediante dati da satellite*, Rapporto dell'Istituto di Agronomia e Coltivazione erbacea, Università di Firenze, R-3-79 (1979).

– *Analisi delle coltivazioni di un'area del Chianti tramite telerilevamento aereo*, Rapporto dell'Istituto di Elettronica, Università di Firenze, R-2-79 (1979).

Conese C., Maracchi G., Miglietta F., *A Multitemporal Analysis for Agriculture Inventory*, Rapporto IATA, CNR (1982).

Garibotto G., *2D Recursive Phase Filters for the Solution of Two-dimensional Wave Equations*, IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. ASSP-27, N. 4, 367-73 (1979).

# Capitolo 16

# Applicazioni alla robotica

## 16.1 Introduzione

Negli ultimi anni si è sviluppato rapidamente il settore della robotica per l'automazione delle produzioni industriali meccaniche ed elettromeccaniche, per i sistemi a bordo dei veicoli spaziali e anche per uso domestico. Con il termine robotica si intende riferirsi ai sistemi automatici di tipo elettromeccanico, costituiti, come struttura di base, da un'unità di controllo (programma) e un'unità di attuazione (braccio e mano meccaniche), in grado di eseguire azioni automatiche di tipo più o meno complesso.

I sistemi robotici possono distinguersi nei seguenti tipi principali:

– sistemi con programma fisso, nei quali la successione delle operazioni effettuate dall'unità di attuazione è predeterminata in modo rigido (tipico esempio: macchina per lavorazioni meccaniche con programma definito da opportune camme meccaniche o nastro perforato);

– sistemi con programma variabile per le diverse esigenze di attuazione e lavorazione, nei quali in genere l'utente "insegna" al sistema robotico la successione delle operazioni di volta in volta richieste (tipico esempio: braccio e mano meccanici sono mossi dall'utente in modo da effettuare in sequenza tutte le operazioni richieste e le successive posizioni sono memorizzate come programma di lavoro nel sistema di controllo e di elaborazione);

– sistemi completamente automatici con apprendimento e decisione autonoma da parte del sistema robotico, che definisce il proprio comportamento e le relative operazioni di attuazione in base alle informazioni acquisite in tempo reale dall'ambiente esterno (tipico esempio: acquisizione dall'esterno di informazioni con sensori meccanici, termici od ottici, elaborazione di queste informazioni e comando conseguente alla unità di attuazione).

I sistemi robotici precedenti hanno complessità crescente. I sistemi dell'ultimo tipo, completamente automatici, tendono a sostituire gradualmente quelli già ampiamente diffusi dei primi due tipi.

**Figura 16.1**
**Struttura generale di un sistema robotico completamente automatico, costituito da un'unità di acquisizione (sensori meccanici o termici, telecamera di ripresa), un'unità di elaborazione, decisione e controllo e un'unità di attuazione.**

La struttura generale dei sistemi del terzo tipo è mostrata nella figura 16.1. Come si vede, si possono distinguere tre parti fondamentali: l'unità di acquisizione delle informazioni dall'esterno (tipicamente sensori meccanici o termici o telecamera di ripresa, che forniscono un'immagine della "scena" osservata); l'unità di elaborazione decisione e controllo, che elabora le precedenti informazioni e decide i comandi da inviare all'unità di attuazione; l'unità di attuazione (braccio e mani meccanici). La seconda unità ha anche funzioni di controllo interattivo sull'unità di attuazione, nel senso che rileva errori negli spostamenti (traslazioni, rotazioni ecc.) e tende a eliminarli a passi successivi nel tempo.

In questi sistemi ha grande importanza la seconda unità di elaborazione (in genere numerica) delle immagini o mappe acquisite. Nel seguito vengono prima riportate considerazioni generali sulle caratteristiche di questa seconda unità e viene poi descritto in dettaglio un sistema per l'acquisizione, l'elaborazione e il riconoscimento di oggetti in movimento, utile per molti sistemi robotici di attuale interesse pratico.

## 16.2 Caratteristiche dei sistemi di acquisizione ed elaborazione di immagini per sistemi robotici

Facendo riferimento alla figura 16.1, consideriamo le caratteristiche generali di un sistema robotico automatico (terzo tipo).

Come già indicato, l'unità di acquisizione preleva le informazioni dall'esterno che hanno interesse per gli azionamenti da effettuare. Consideriamo il caso, di maggiore interesse attuale, di una telecamera o rilevatore ottico che fornisce immagini successive (*frames*) di oggetti in movimento. Il segnale della telecamera o del rilevatore viene inviato all'unità di elaborazione, che provvede anzitutto a convertirlo in forma numerica (campionamento, quantizzazione, codifica binaria). Le matrici di valori numerici acquisite vengono elaborate al fine di estrarre le informazioni relative agli oggetti in movimento.

Un primo problema riguarda la velocità di elaborazione: per ridurre questa a valori di pratico interesse, verranno selezionate immagini (*frames*) a intervalli di tempo che

siano il più possibile elevati, ma comunque in grado di tener conto dei movimenti "significativi" degli oggetti.

L'elaborazione delle immagini selezionate deve permettere il riconoscimento e l'inseguimento (*tracking*) degli oggetti in movimento: possono per questo scopo essere utilizzate le tecniche descritte nel capitolo 10. In genere, prima dell'operazione di riconoscimento vero e proprio, conviene effettuare una pre-elaborazione di ogni immagine selezionata (esaltazione dei contrasti, filtraggio per migliorare la qualità dell'immagine, estrazione dei contorni...) al fine di rendere più sicura l'operazione stessa del riconoscimento. Occorre infatti individuare automaticamente e in modo sicuro la forma degli oggetti (spesso è sufficiente la forma esterna), distinguere gli oggetti uno dall'altro (dalla diversa struttura o forma geometrica) e seguirne il movimento (può essere sufficiente seguire il movimento di pochi punti dell'oggetto o anche di un solo punto significativo, quale ad esempio il baricentro).

Pur riducendo i tempi di elaborazione al valore minimo consentito dal particolare problema in esame (in genere pari a uno o più intervalli fra un'immagine selezionata e la successiva), è evidente che occorrono algoritmi veloci di elaborazione in grado di fornire in tempi utili le decisioni finali all'unità di attuazione. Dato che lo scopo principale dell'elaborazione è il riconoscimento e l'inseguimento degli oggetti in movimento, per molte applicazioni può essere sufficiente trattare immagini "binarie", cioè costituite da due soli livelli di grigio (bianco e nero), i cui pixel sono quindi definiti da un singolo bit.

In definitiva i parametri fondamentali in gioco, che condizionano il sistema di elaborazione numerica delle immagini per i sistemi robotici considerati, sono i seguenti:

– complessità degli oggetti da riconoscere e inseguire nel loro movimento (numero, struttura, forma, condizioni di illuminazione ecc.);

– complessità del moto degli oggetti e relative velocità (traslazioni, rotazioni, rapidità di spostamento ecc.);

– complessità delle operazioni meccaniche e attuazioni da eseguire da parte degli organi esecutivi (braccio e mano meccanici ecc.).

I tre tipi di complessità precedenti definiscono in effetti la complessità globale del sistema robotico in esame.

## 16.3 Esempio di tecnica di elaborazione numerica per il riconoscimento e l'inseguimento di oggetti in movimento in sistemi robotici

Facendo riferimento a un sistema di acquisizione e di elaborazione di immagini del tipo S-2 (descritto nel cap. 11), ammettiamo di riprendere con la telecamera in bianco e nero una serie di immagini degli oggetti in movimento, di convertire in forma numerica tali immagini e di memorizzarle su disco o nastro magnetico.

Una tecnica di elaborazione, appositamente sviluppata per il riconoscimento e l'in-

seguimento di oggetti in movimento (Borghesi, Cappellini, Del Bimbo, 1981), si articola nelle fasi seguenti.

(1) Fase di "apprendimento", che comprende l'acquisizione numerica e la caratterizzazione degli oggetti da riconoscere (*object modelling*). Questa fase viene effettuata "fuori linea", prima dell'operazione di riconoscimento e d'inseguimento dinamico degli oggetti. La caratterizzazione avviene mediante la schematizzazione di ogni oggetto in esame con i suoi contorni esterni: viene applicato un operatore 3 · 3 del tipo di Sobel modificato (fig. 16.2) (§ 6.8). Viene poi effettuata la trasformata di Fourier veloce (FFT) del contorno: sono determinati i valori di distanza dei suoi punti dal baricentro con un procedimento di scansione circolare (fig. 16.3) e si applica la FFT a tali valori di distanza. Oggetti di forma diversa vengono ad avere spettri del contorno diversi, che sono considerati come caratteristiche (*features*) degli oggetti da riconoscere: la "distanza" fra queste caratteristiche assicura il riconoscimento dei diversi oggetti.

(2) Fase di acquisizione e di inseguimento degli oggetti nella scena reale dinamica, che comprende diverse sottofasi di elaborazione.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 0 | -1 |
| 2 | 0 | -2 |
| 1 | 0 | -1 |

Componente $x$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |
| -1 | -2 | -1 |

Componente $y$

**Figura 16.2**
Operatore 3 · 3 del tipo di Sobel modificato: componenti secondo $x$ e $y$.

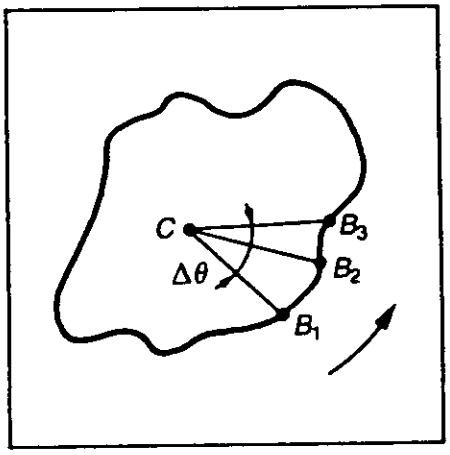



**Figura 16.3**
Procedimento di scansione lineare del contorno di un oggetto con determinazione dei valori di distanza dei suoi punti dal baricentro $C$.

– Pre-elaborazione di ogni singola immagine con un algoritmo di esaltazione dei contrasti di tipo non lineare (Lev, Zucker, Rosenfeld, 1977). Questo algoritmo serve a eliminare disturbi e rumore nell'immagine: il livello di grigio in ogni pixel è sostituito dalla media fra il proprio livello e quelli dei pixel vicini, escludendo quelli che hanno un valore di livello di grigio che differisce più di una certa soglia dal livello del pixel in esame; cioè il livello $a_0$ del pixel $P_0$ (fig. 16.4) è sostituito da:

$$a'_0 = \frac{1}{N} \sum_{a_i \in S} a_i \qquad [16.1]$$

ove $S = \{a_i : |a_i - a_0| \leq k\}$ e $i = 0, 1, 2, ..., 8$, essendo $N$ il numero effettivo dei pixel vicini utilizzati nella media. Questo algoritmo, assai semplice, ha i seguenti vantaggi: non vengono considerati nell'operazione di media i valori dei pixel di contorno il cui contrasto è superiore a $k$, per cui il contorno non è minimamente alterato; in una zona relativamente omogenea vengono eliminati gli effetti di rumore che corrispondono a differenze inferiori a $k$; piccole variazioni di livelli di grigio presenti in certe zone dell'immagine (che differiscono fra loro meno di $k$ e in genere non sono connessi a contorni) vengono appiattite o eliminate.

– Estrazione dei contorni con l'operatore sopra indicato (fig. 16.2).

– Estrazione e inseguimento degli oggetti in movimento. L'estrazione degli oggetti in movimento viene effettuata mediante una sottrazione pixel per pixel fra due immagini di ordine $K$-mo e $(K+n)$-mo, cioè:

$$D(n_1, n_2; K, K+n) = f(n_1, n_2, K) - f(n_1, n_2, K+n). \qquad [16.2]$$

Viene anche applicata una soglia $T$ alla differenza $D(n_1, n_2, K, K+n)$ per ottenere un'immagine a due livelli $g(n_1, n_2, K, K+n)$, cioè:

$$\begin{aligned} g(n_1, n_2, K, K+n) &= 1 \quad \text{se} \quad D(n_1, n_2, K, K+n) > T \\ g(n_1, n_2, K, K+n) &= 0 \quad \text{altrimenti.} \end{aligned} \qquad [16.3]$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $P_{15}$ | $P_{14}$ | $P_{13}$ | $P_{12}$ | $P_{11}$ |
| $P_{16}$ | $P_4$ | $P_3$ | $P_2$ | $P_{10}$ |
| $P_{17}$ | $P_5$ | $P_0$ | $P_1$ | $P_9$ |
| $P_{18}$ | $P_6$ | $P_7$ | $P_8$ | $P_{24}$ |
| $P_{19}$ | $P_{20}$ | $P_{21}$ | $P_{22}$ | $P_{23}$ |

**Figura 16.4**
Indicazione dei pixel dell'immagine (zona entro riquadro tratteggiato) su cui opera l'algoritmo di esaltazione dei contrasti di tipo non lineare.

Mediante la [16.3] vengono così estratti gli oggetti che si sono mossi dal *frame* $K$-mo al $(K+n)$-mo. Ripetendo il procedimento su immagini successive distanti $n$ fra loro, si possono inseguire i movimenti ulteriori.

(3) Fase di riconoscimento dei singoli oggetti. Come indicato al punto (1), si applica la FFT ai contorni degli oggetti estratti. Si effettua un confronto fra gli spettri acquisiti dalla scena reale e quelli in memoria, acquisiti nella fase 1 di apprendimento: si confrontano solo i moduli degli spettri per avere un'"invarianza rotazionale" (se, infatti, avviene una rotazione di un oggetto, si ha uno scorrimento della funzione contorno, a cui corrisponde uno sfasamento lineare nel relativo spettro, con nessuna variazione del modulo). Per decidere il riconoscimento di un oggetto, si usa un criterio di minima distanza fra gli spettri; si confronta cioè lo spettro acquisito dalla scena reale con tutti quelli in memoria e lo si attribuisce all'oggetto il cui spettro differisce di meno degli altri.

Nelle tavole 45, 46, 47, 48 si vede un esempio di applicazione della tecnica precedente al riconoscimento e inseguimento di tre oggetti meccanici: chiave, dado e rondella. In principio si vede l'acquisizione di una tipica scena reale dal sistema S-2, l'estrazione dei contorni e il riconoscimento dei tre oggetti (attraverso gli spettri dei contorni) assegnando a ciascuno un colore diverso del contorno; poi è mostrato l'inseguimento degli oggetti con il riconoscimento relativo dopo un piccolo spostamento; infine sono mostrati l'inseguimento e il riconoscimento dopo diversi spostamenti degli oggetti.

In un sistema robotico reale, progettato ad esempio per la separazione dei tre oggetti meccanici sopra indicati, che scorrono su un nastro trasportatore di un impianto di montaggio industriale, disponendo di un sistema del tipo S-2 con velocità di elaborazione adeguata alla rapidità di spostamento degli oggetti sul nastro, il riconoscimento dei tre oggetti (colori indicati: bianco, giallo, rosso) può comandare un braccio meccanico che prelevi o tolga trasversalmente dal nastro uno o l'altro o successivamente tutti e tre gli oggetti per effettuare una semplice separazione o utilizzarli a tempi determinati in operazioni di montaggio meccanico. Per tale operazione può essere in particolare utilizzata l'informazione sulla posizione di ogni singolo pezzo meccanico, che è perfettamente nota, nel piano dell'immagine acquisita ed elaborata (ad esempio posizione $(x_b, y_b)$ del baricentro del pezzo): occorrerà, naturalmente, che i tempi di intervento del braccio meccanico siano sufficientemente rapidi rispetto alla velocità di scorrimento del nastro trasportatore, oppure che si tenga conto della velocità stessa, in modo da definire la posizione dei pezzi al momento di intervento del braccio meccanico.

Un'altra tecnica di elaborazione, sviluppata per il riconoscimento di oggetti fissi e in movimento, utilizza un pre-filtraggio non lineare con soglia per riduzione del rumore e gli "invarianti inerziali" (caratteristiche geometriche principali) come metodo di riconoscimento. Un esempio di applicazione di questa tecnica, che tiene conto anche delle parti interne agli oggetti, è mostrato nelle tavole 49, 50: dall'acquisizione

numerica dell'immagine alla pre-elaborazione, al riconoscimento finale, con individuazione del baricentro e identificazione scritta (Borghesi, Cappellini, Del Bimbo, Mecocci, 1984).

## Riferimenti bibliografici

Borghesi C., Cappellini V., Del Bimbo A., *Recognition and Classification of Moving Objects*, in "Proceedings of the International Conference on Digital Signal Processing", 1119-27 (Firenze 1981).

– Mecocci A., *Two Special Digital Processing Systems for Recognition of Moving Objects*, in "Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing" (San Diego, California 1984).

Lev A., Zucker S. W., Rosenfeld A., *Iterative Enhancement of Noisy Images*, IEEE Trans. Syst. Ma. Cybern., vol. SMC-7, 435-42 (1977).

# Capitolo 17

# Applicazioni alle opere d'arte

## 17.1 Introduzione

Le applicazioni dei sistemi di elaborazione (calcolatori di varie dimensioni con unità periferiche più o meno complesse) e delle relative tecniche numeriche alle opere d'arte, e più in generale ai beni culturali, possono essere distinte in due tipi principali:

– uso dei sistemi e tecniche di elaborazione per produrre opere d'arte (arte con calcolatore o *computer art*);
– uso dei sistemi e delle tecniche di elaborazione per lo studio, l'analisi e le indagini su opere d'arte già esistenti (in particolare opere classiche di maggiore significato e importanza).

L'arte prodotta con calcolatore è nata più di 15 anni fa, componendo forme, figure, immagini in bianco e nero o a colori con opportuni programmi che attivano i sistemi di elaborazione di vario tipo.

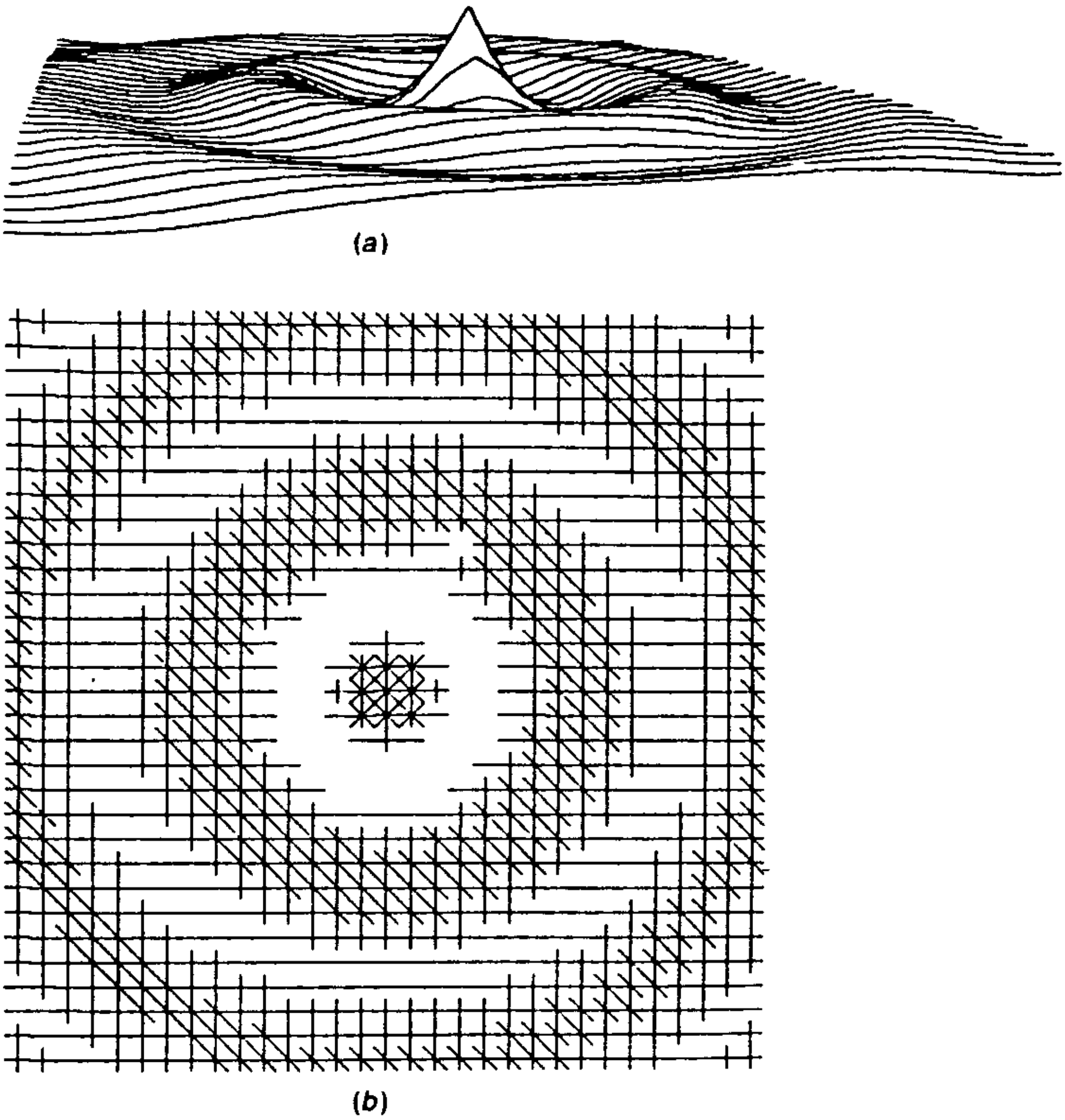
Le applicazioni dei sistemi e delle tecniche di elaborazione alle indagini sulle opere d'arte sono più recenti e riguardano molteplici aspetti relativi alla conoscenza più "oggettiva" delle opere stesse, alla loro conservazione e al loro restauro.

Nel seguito, dopo un breve cenno all'arte prodotta con calcolatore, vengono descritte più in particolare le varie applicazioni alle opere d'arte esistenti, con alcuni esempi illustrativi delle attuali possibilità.

## 17.2 Arte prodotta con calcolatore (computer art)

I sistemi di elaborazione, descritti nel capitolo 11, con le varie unità periferiche (stampanti, plotter, monitor in bianco e nero e a colori ecc.), costituiscono strumenti di lavoro estremamente flessibili (con opportuni programmi che attivino i sistemi stessi) per la composizione di forme, figure, immagini in bianco e nero o a colori.

In particolare con il plotter e i diversi terminali di uscita visivi siamo di fronte a una vera e propria tavolozza, incredibilmente ricca, plasmabile e adattabile (variando nei singoli punti o pixel del quadro di lavoro i segni elementari, il contrasto bianco-nero o il tono e il contrasto dei vari colori, in particolare dei tre primari, rosso, verde e blu) alle più svariate esigenze espressive. Su questa tavolozza si possono comporre, con adeguati programmi di elaborazione, forme e figure rigorosamente predeterminate (con relazioni matematiche precise, aventi soluzioni espressive esattamente note) o, almeno in parte, casuali di tipo aleatorio (con relazioni di tipo probabilistico, dando ad esempio a diversi valori diverse probabilità di manifestarsi, di tradursi in segno grafico o livello di grigio o anche di colore ecc.). Si può quindi parlare di "arte", basata



(a)

(b)

**Figura 17.1**
Esempio di forma predeterminata: (*a*) presentazione prospettica di funzione del tipo $\sin(x)/x$ bidimensionale; (*b*) rappresentazione nel piano con pochi livelli di grigio (sovrapposizione di segni elementari del plotter) della funzione precedente.

su precise regole numeriche di tipo deterministico, che definiscono a priori lo sviluppo esatto delle forme espressive e portano alla produzione di successive opere esattamente uguali (fig. 17.1); oppure di "arte" basata su relazioni probabilistiche di tipo aleatorio, che prevedono solo parzialmente le forme effetivamente ottenute, modificabili però, se non soddisfano, con interventi successivi, in un dialogo costruttivo fra uomo e macchina, fra concezione e attuazione, con produzione di opere successive mai uguali fra loro in una rapida evoluzione dinamica di espressione e di rappresentazione (Cappellini, 1979).

Le possibilità della *computer art* sono quindi molteplici, sia per le diverse presentazioni che il calcolatore può attuare con i suoi terminali, sia per le svariatissime forme e immagini che si possono creare (su un foglio o schermo con $512 \cdot 512$ punti e con 64 livelli di grigio, si hanno, ad esempio, ben $64^{512 \cdot 512}$ diverse immagini possibili!). Essa si può avvalere anche di tecniche di animazione, con immagini in movimento, con messaggio artistico connesso a tutta una serie di quadri, di scene.

A parte il giudizio sul valore artistico di queste forme prodotte con l'ausilio del calcolatore (fatto su cui molti discutono ancora con atteggiamenti increduli), è innegabile riconoscere il valore, se non altro esplorativo di nuove forme espressive, di una sperimentazione intensa condotta per tanti anni con sforzi di ricerca e creativi non indifferenti. E' senz'altro, poi, un'attività che tende a colmare la separazione fra scienza e tecnica da un lato e valori umanistici e artistici dall'altro, che contribuisce in definitiva ad "umanizzare" la macchina da calcolo (si hanno così "programmatori-artisti" e "artisti-programmatori").

## 17.3 Applicazioni dei sistemi e tecniche di elaborazione alle opere d'arte

La *computer art* non esaurisce le possibilità di applicazione dei sistemi e delle tecniche di elaborazione all'arte e più in generale ai beni culturali. Essa rappresenta in effetti, come già osservato, una delle due possibilità fondamentali di interazione fra elaborazione-calcolatore e arte: la creazione di forme espressive e di opere d'arte mediante l'elaborazione al calcolatore. Ma resta l'altra, non meno interessante e affascinante: analizzare le opere d'arte esistenti con il calcolatore. E, anzi, su questa seconda linea si sono avuti recentemente sviluppi estremamente importanti e promettenti, sia per quanto riguarda una conoscenza più approfondita delle opere d'arte, spingendosi – se così si può dire – entro di esse per carpirne i segreti e contenuti più intimi, sia per la messa a punto di metodologie e tecniche atte a preservare le opere stesse per tramandarne in modo sicuro il valore, patrimonio irripetibile dell'umanità intera.

In una prima forma, relativamente semplice, le tecniche di elaborazione e i calcolatori sono stati utilizzati come "catalogo", immagazzinando nelle memorie descrizioni sintetiche delle opere d'arte più importanti (ad esempio del Rinascimento italiano), con pochi dati principali: autore, epoca, descrizione dell'opera, vicende storiche ecc. (Corti, Ferrandi, 1980). Utile indubbiamente, questa catalogazione e descrizione

sintetica delle opere d'arte impiega solo una piccola parte della straordinaria capacità di elaborazione e di analisi che i sistemi di elaborazione moderni, opportunamente programmati, possono offrire, facendo uso delle diverse unità e terminali di ingresso e uscita (vedi cap. 11).

Come è stato ampiamente indicato (vedi capp. 2, 3, 11), immagini in bianco-nero o a colori riprese direttamente sulle opere d'arte, o fotografie di esse, possono essere acquisite e convertite in forma numerica (con le tre fasi principali del campionamento spaziale, quantizzazione e codifica binaria, illustrate nel cap. 3). Per quanto riguarda le immagini o foto a colori, esse possono essere convertite in forma numerica (cap. 3) estraendo con appositi filtri ottici i tre colori primari: rosso, verde e blu.

Una volta che l'immagine in bianco-nero o a colori dell'opera d'arte sia stata convertita in forma numerica o "digitalizzata", la sua rappresentazione numerica costituisce un "archivio" completo, sicuro e immutabile nel tempo, che conserva lo stato dell'opera come era al momento della ripresa diretta e dell'acquisizione da parte del sistema digitalizzatore-elaboratore o della fotografia (si ammette, ovviamente, che la digitalizzazione sia effettuata correttamente, cioè rispettando i criteri del campionamento spaziale e usando per la quantizzazione e la corrispondente codifica binaria un numero di livelli di ampiezza o di grigio sufficientemente elevato). Un esempio di digitalizzazione del dipinto *La flagellazione* di Piero della Francesca è mostrato nelle tavole 51, 52, 53. E' così possibile, oltre a ripresentare su video bianco-nero o a colori l'opera, ogni volta che sia richiesto, anche valutare il processo di deterioramento nel tempo o la qualità di conservazione dell'opera, effettuando successive digitalizzazioni nel tempo e confronti punto-punto mediante il calcolatore sulle due rappresentazioni numeriche. Si può creare così una vera e propria banca di dati per le opere d'arte (una prima forma sintetica di banca di dati di valore descrittivo è ottenibile con la semplice catalogazione sopra ricordata) che assicura la conservazione indistruttibile delle opere a beneficio delle generazioni future.[1] Queste affascinanti banche di dati per l'arte, già attuabili per le opere più importanti (come già iniziato su piccola scala a Firenze con una collaborazione fra Istituto di elettronica della Facoltà di Ingegneria, Università Internazionale dell'Arte e l'Opificio delle Pietre Dure e Laboratorio di Restauro), divengono rapidamente più facili ed economiche da realizzare, dati gli straordinari sviluppi tecnologici delle memorie che aumentano continuamente di capacità con soluzioni estremamente compatte (oltre che di tipo magnetico, anche a bolle magnetiche, a semiconduttori VLSI, con video-dischi incisi con laser ecc.: vedi capp. 11, 18).

L'acquisizione automatica e la digitalizzazione, in modo del tutto oggettivo, delle opere d'arte apre la porta a numerose, interessanti elaborazioni e analisi che si possono fare con il calcolatore, una volta che questo disponga, nelle sue memorie, dei dati delle opere stesse.

Anzitutto, poiché nelle opere d'arte, e in mirabile misura in quelle classiche più

[1] Mentre una foto o un film possono, invecchiando, perdere informazione, i dati binari 0 e 1 su supporto sicuro (al limite schede metalliche!) sono inalterabili.

famose dell'antichità e del Rinascimento, l'artista ha creato una struttura geometrica, analitica, spesso di incredibile precisione ed esattezza, basata su suoi moduli segreti o personali di composizione dell'opera, il calcolatore con le tecniche di elaborazione può estrarre queste forme geometriche e moduli strutturali di composizione in modo oggettivo e preciso, con opportuni programmi e analisi. E' così possibile effettuare l'estrazione automatica degli elementi geometrici fondamentali (contorni, linee, curve, angoli...; vedi § 6.8) che costituiscono la struttura portante, lo scheletro dell'opera (pittura, statua, composizione architettonica): curve anche complesse possono essere estratte e mostrate nella loro forma bidimensionale e tridimensionale.

Un esempio di estrazione dei contorni, con operatore 3 · 3 a gradiente (vedi § 6.8), sulla *Flagellazione* di Piero della Francesca di tavola 53 è mostrato in tavola 54. I contorni, le linee e le curve estratte dalle opere possono poi essere, se si vuole, descritte o approssimate in modo estremamente accurato attraverso opportune relazioni matematiche: basti pensare alla cupola della chiesa di Santa Maria del Fiore a Firenze, opera di Filippo Brunelleschi, le cui forme geometriche esatte, a lungo indagate ed esplorate, sono in buona parte ancora avvolte dal mistero della loro costruzione. Un esempio di estrazione degli elementi strutturali su una ripresa fotografica della cupola è mostrato nella tavola 55. E' interessante osservare che, con due riprese fotografiche della stessa cupola da due punti vicini, digitalizzate con sufficiente precisione, è possibile ricostruire, con un opportuno programma, la struttura tridimensionale dell'opera (stereoscopia numerica, vedi § 15.3) (Bernabò, Cappellini, Fondelli, 1980). Un altro esempio, sulla struttura di una formella del Battistero di Firenze, è mostrato nelle tavole 56, 57, 58. L'indagine dentro le opere per capirne la vera struttura può, su questa linea, essere spinta fino all'analisi e alla ricostruzione dei processi formativi delle opere stesse, ripercorrendo il percorso di creazione individuale e originale dell'opera da parte dell'artista, seguendo e verificando con opportuni programmi di elaborazione le forme specifiche della sua rappresentazione, rintracciando dinamicamente il processo costruttivo singolare che le ha prodotte quali esse sono attualmente o alla loro origine (Cappellini, Constantinides, 1980; Ragghianti, 1974). Con opportune ipotesi sugli elementi in profondità[2] in opere pittoriche sono state effettuate ricostruzioni tridimensionali di quadri riproducendo scene e ambienti ripresi dalla realtà tridimensionale o concepiti in essa. Per effettuare questa trasformazione geometrica dalle due dimensioni del quadro alla rappresentazione tridimensionale, sono stati sviluppati opportuni programmi, sperimentati su diverse opere pittoriche (Attardi, 1978). L'estrazione dei contorni sopra indicata può fornire un'utile base di partenza per la ricostruzione tridimensionale. Fra i risultati ottenuti con queste indagini ricordiamo: prova dell'equivalenza plani-volumetrica, a fondamento modulare proporzionale, della *Trinità* di Masaccio, correggendo numerose ipotesi precedenti; prova dell'identità della regolazione in pianta e frontale della *Flagellazione* e la corrispondenza frontale, laterale e dei particolari della *Resurrezione* di Piero della Francesca; determinazione

[2] Ad esempio, possono essere efficacemente usati elementi strutturali di forma quadrata (come piastrelle o basi di colonne) o forma geometrica nota (sezione circolare).

dei rapporti tra facciata e planimetria della *Scuola di Atene* di Raffaello, scoprendo l'identità della loro generatrice con la matrice stellare armonica dipinta da Raffaello nell'affresco... (Cristiani Testi, 1978).

Una delle elaborazioni più interessanti e promettenti per il futuro, che il calcolatore può effettuare per le opere d'arte, riguarda il restauro delle opere stesse. La separazione accurata delle varie componenti cromatiche, effettuabile mediante appositi filtri ottici aventi un'opportuna risposta spettrale, può permettere di valutare le intensità relative dei vari colori (non solo rosso, verde, blu, ma anche qualsiasi altro: giallo, magenta ecc.) sull'opera da restaurare, in modo da conoscere le diverse componenti cromatiche usate dall'artista e fare ipotesi adeguate sui diversi materiali e composti pittorici: tutto ciò può essere molto importante per effettuare un appropriato restauro (scelta dei colori, loro adeguata dosatura) o per verificare la bontà di un intervento sull'opera già attuato. Interessanti esperienze sono state effettuate in collaborazione fra l'Opificio delle Pietre Dure e Laboratorio di Restauro di Firenze e l'Istituto di Elettronica della Facoltà di Ingegneria di Firenze: in particolare è stata verificata la bontà ed efficacia di diversi interventi di restauro su opere pittoriche. Un esempio di tali analisi è mostrato nelle tavole 59, 60.

L'applicazione delle tecniche di elaborazione numerica per il restauro delle opere d'arte o, come è stato definito (Cappellini, 1979), il "restauro elettronico", non si limita all'analisi strutturale sopra indicata, ma si estende anche alla ricostruzione mediante opportuni programmi di alcune parti mancanti di un'opera e alla presentazione dell'opera ricostruita o restaurata su video bianco-nero o a colori. Si possono, infatti, applicare le tecniche di interpolazione e di estrapolazione per ricostruire parti mancanti di estensione limitata (vedi § 8.5), le tecniche di filtraggio numerico, esaltazione dei contrasti ed estrazione dal rumore per zone dell'opera degradate parzialmente (quadri con zone in cui i colori sono sfumati, ove le figure si intravedono debolmente, le scene sono sbiadite).[3] Tecniche di questo tipo possono essere utilmente impiegate anche per riconoscere parti latenti o nascoste, da riportare alla luce per una corretta interpretazione dell'opera quale era in origine: molte opere sono state deformate, rispetto alla loro originale creazione, dall'intervento successivo dell'uomo (variazioni di struttura, restauri effettuati malamente ecc.). Un esempio di indagine per ritrovare la concezione originale dell'opera (in questo caso, l'Ospedale degli Innocenti di Firenze, del Brunelleschi) è illustrato nelle tavole 61, 62, 63: mediante indagine termografica e opportune elaborazioni numeriche di esaltazione dei contrasti e di filtraggio numerico, è stato possibile scoprire alcune nicchie originali di forma circolare, successivamente tolte (Cappellini, Rocchi, 1981).

Tecniche di elaborazione numerica del tipo precedente possono essere anche estremamente utili per estrarre strutture latenti di tipo archeologico, digitalizzando ed elaborando, ad esempio, foto da aereo con pellicole nell'infrarosso, o usando rilevatori

[3] Nel caso di opere a colori (quadri, affreschi ecc.) si possono ricostruire le parti mancanti o deteriorate nei tre colori fondamentali (rosso, verde e blu) e quindi procedere a una sintesi dei tre colori per la ricostruzione globale.

termici. In particolare, esaltazioni dei contrasti e filtri numerici inversi possono far apparire allineamenti murari, opere architettoniche e strade dell'antichità: deboli tracce di esse sono rilevabili con sensori termici, in quanto le strutture sommerse dal terreno hanno gradienti termici diversi dal terreno circostante; l'elaborazione numerica esalta ed estrae tali tracce dal contesto (Cappellini, Fondelli, 1980). Ancora le stesse tecniche sono impiegabili per riconoscere scritte apparentemente illeggibili in antichi manoscritti (vedi esempio indicativo di tav. 10).

In conclusione, le tecniche di elaborazione numerica possono portare contributi di grande importanza nel mondo dell'arte e più in generale dei beni culturali per scopi di archiviazione (banche di dati artistici), analisi strutturale, restauro e ricostruzione delle opere d'arte e reperti archeologici.

## Riferimenti bibliografici

Attardi G., *Generalprosp System Computer Perspective Reconstruction*, Sound Sonda, NN. 3-4, 77-83 (1978).

Bernabò M., Cappellini V., Fondelli M., *Edge Extraction Techniques for Analysis of Art Works*, in Cappellini V., Constantinides A. G. (a cura di), "Digital Signal Processing" (Academic Press, Londra e New York 1980).

Cappellini V., *Il calcolatore e l'arte*, Civiltà delle macchine, vol. 27, 53-58 (1979).

– Constantinides A.G. (a cura di), *Digital Signal Processing* (Academic Press, Londra e New York 1980).

– Rocchi G., *Processing of Art Works*, Tavola rotonda tenuta alla International Conference on Digital Signal Processing (Firenze 1981).

Corti L., Ferrandi S. (a cura di), *Manuale tecnico per l'elaborazione automatica di dati storico-artistici* (Tipografia Senese, Siena 1980).

– *Metodologie di analisi e di catalogazione dei beni culturali* (Tipografia Senese, Siena 1980).

Cristiani Testi M. L., *La conoscenza dell'arte con gli strumenti elettronici*, Critica d'Arte, NN. 160-162, 14-25 (1978).

Ragghianti C. L., *Arte: fare e vedere* (Vallecchi, Firenze 1974).

Capitolo 18

# Evoluzione e prospettive dell'elaborazione numerica dei segnali e delle immagini

## 18.1 Introduzione

L'elaborazione numerica dei segnali e delle immagini si va evolvendo rapidamente, aprendosi ad applicazioni sempre più estese anche in nuovi settori operativi. Questa straordinaria evoluzione ed espansione è dovuta essenzialmente a due motivi (Cappellini, 1981):

– rapido sviluppo della tecnologia dei dispositivi digitali e dei sistemi di elaborazione con relative unità periferiche;

– miglioramento degli algoritmi di elaborazione esistenti e definizione di altri di nuovo tipo, particolarmente efficienti e veloci.

Nel seguito sono riportate considerazioni sintetiche sui due aspetti precedenti e indicati gli sviluppi applicativi più rilevanti.

## 18.2 Evoluzione della tecnologia dei dispositivi e sistemi di elaborazione

La tecnologia dei dispositivi digitali si sta sempre più rapidamente evolvendo verso frequenze di lavoro maggiori, maggiore complessità di funzioni logiche per singolo modulo (chip), minori dimensioni.

Come già indicato (§ 11.7) sono in rapida evoluzione i circuiti digitali ad alta e ad altissima integrazione, in grado di effettuare le operazioni aritmetiche elementari o funzioni di memoria: sono già disponibili sommatori e moltiplicatori a 16 o 24 bit capaci di operare con tempi da centinaia e decine di nanosecondi (TRW, AMI, NEC); memorie su singolo chip sono disponibili con capacità da migliaia di bit a centinaia e migliaia di chilobyte operanti con cicli elementari da decine a pochi nanosecondi (Chan, 1981). Per frequenze di lavoro più basse, la tecnologia MOS (*metal-oxide-semicon-*

*ductor*) con integrazione VLSI ha prodotto microprocessori a 16 bit su singolo chip e memorie RAM da 64 kbyte, dispositivi contenenti circa 100000 transistori per chip (Brodersen, 1981). Poiché negli ultimi vent'anni il numero di dispositivi per chip si è all'incirca raddoppiato ogni anno, pur ammettendo un certo rallentamento in questa linea di integrazione fino a prevedere il raddoppio ogni anno e mezzo, si arriva a delineare, per il 1990, chip contenenti più di 10 milioni di componenti elementari quali i transistori (spessore dei conduttori elementari pari a 50 ÷ 60 Å).

Anche i circuiti operanti a tempi discreti (dati campionati) del tipo CCD o a "condensatori commutati" sono in sviluppo rapido: si vanno realizzando filtri trasversali o FIR e memorie operanti fino a decine di megahertz. In particolare, sono già disponibili telecamere TV con dispositivi CCD, particolarmente compatte e capaci di operare in condizioni di bassa luminosità.

Altri dispositivi di crescente interesse per certe elaborazioni (in particolare, filtraggio) sono i dispositivi SAW (*surface acoustic wave*) e MSW (*magneto-static wave*), basati su fenomeni di propagazione delle onde e su effetti acustico-ottici. In particolare i dispositivi SAW possono operare a frequenze da 10 MHz a 2 GHz: sono stati recentemente realizzati circuiti di convoluzione con SAW di pochi centimetri di dimensioni, operanti in tempo reale con una velocità di elaborazione equivalente a circa $5 \cdot 10^{10}$ moltiplicazioni numeriche per secondo.

I dispositivi ottici appaiono sempre più la soluzione ideale per effettuare elaborazioni velocissime, prima delle elaborazioni numeriche: dispositivi di "ottica integrata", uniti anche a CCD o SAW, sono già stati sperimentati per effettuare molte elaborazioni utili: analisi spettrale veloce, convoluzione, correlazione. In particolare sono stati definiti circuiti di conversione analogico-digitale, basati su modulatori interferometrici fabbricati su substrati di $LiNbO_3$, operanti a velocità superiori a $10^9$ campioni/s (6 ÷ 8 bit). Usando gli stessi modulatori interferometrici, sono stati sviluppati circuiti logici elementari aventi ritardi inferiori a $10^{-10}$ s (Sottini, Russo, Righini, 1981).

Lo sviluppo precedente dei dispositivi permette di realizzare unità di elaborazione sempre più complesse, veloci e compatte (vedi cap. 11): calcolatori, minicalcolatori, microprocessori e *array processors*. Cominciano ad essere disponibili microprocessori a 16 e 32 bit, più potenti dei calcolatori standard di alcuni anni fa. Le strutture di elaborazione si vanno anche evolvendo, con soluzioni (per l'elaborazione di segnali e di immagini) comprendenti più unità di elaborazione in parallelo o variamente connesse fra loro attraverso linee (*bus*) di collegamento e trasferimento dei dati ad alta velocità.

Per l'elaborazione di grandi masse di dati o di immagini di grandi dimensioni, hanno particolare importanza le memorie esterne di acquisizione e di registrazione dei dati elaborati. Sono in fase di sviluppo, a questo riguardo, registratori digitali a nastro magnetico HDDT (*high density digital tape*), con densità di immagazzinamento più di 10 volte maggiore dei registratori attuali (maggiore di $10^{11}$ bit). Ricorrendo alle tecniche ottiche, sono già disponibili dischi ottici, incisi con fasci laser, con capacità di circa $10^{10}$ bit/disco e velocità di trasferimento di circa 10 Mbit/s e si stanno svilup-

pando tipi con maggiori capacità ($10^{10}$ bit/disco) con costi relativamente modesti (specialmente al crescere della produzione).[1]

Per i problemi specifici dell'elaborazione numerica dei segnali e delle immagini, si vanno anche sempre più sviluppando gli "elaboratori di segnali" o "elaboratori di immagini" ad hoc, più o meno programmabili per usi diversi, al fine di aumentare al massimo la velocità di elaborazione e mantenere il più possibile limitate le dimensioni (e possibilmente i costi). Un esempio interessante per l'elaborazione veloce delle immagini è rappresentato dal sistema GOP (*general operator processor*), che può essere connesso con calcolatori e minicalcolatori standard. Il GOP utilizza un'architettura del tipo MIMD (*multiple instruction - multiple data stream*), con unità veloce parallela (facilmente riconfigurabile e riprogrammabile) seguita da unità seriale. Mediante un algoritmo di elaborazione che estrae l'informazione sulla struttura dell'immagine legata ai contorni e proprietà dell'immagine, applicato a più "livelli", con procedure "gerarchiche" e cicli di elaborazione iterativi (cioè con controreazione), il sistema è in grado di effettuare elaborazioni velocissime sulle immagini (potenza di elaborazione pari a $10^9$ istruzioni/s, velocità di elaborazione pari a 40 ns per ogni punto dell'immagine d'ingresso): in sintesi, la sua velocità di elaborazione viene indicata come $10^5$ volte maggiore di quella dei sistemi di elaborazione più convenzionali (Telub, 1981). Un altro esempio di struttura avanzata di elaborazione veloce delle immagini è costituito dall'EIDOBRAIN 7001 della VDS di Firenze: il sistema si basa su più processori (fino a 16) operanti in parallelo, connessi anche con un *array processor*, con *multibus* di scambio dati ad altissima velocità (fino a 128 Mbyte/s); immagini a colori di 1024 X 1024 pixel (8 bit per pixel) possono essere acquisite alla velocità di 75 Mbyte/s, con possibilità di elaborazione veloce in tempo reale (calcolo della media su tutta l'immagine in 1/30 s) (VDS, 1982; DPS, 1984).

## 18.3 Evoluzione degli algoritmi di elaborazione

Gli algoritmi di elaborazione si stanno evolvendo di pari passo con gli sviluppi tecnologici, spesso con interazioni mutue assai proficue.

In analogia con le tendenze evolutive per i dispositivi, si stanno sviluppando algoritmi con le seguenti caratteristiche:

– alta efficienza (al fine di ottenere il più perfettamente possibile le prestazioni richieste);
– elevata velocità (riduzione del numero di operazioni: somme, moltiplicazioni);
– minima complessità di uso (facilità di programmazione, adattabilità ad applicazioni diverse).

[1] Dischi ottici (con incisione laser e codifica numerica) sono sempre più utilizzati anche per sistemi audio di alta qualità.

Algoritmi di trasformazione (vedi cap. 5) sono già disponibili in forma veloce e compatta (FFT, FWT ecc.), anche se si studiano ulteriori semplificazioni o forme più veloci.

Algoritmi di filtraggio numerico FIR sono disponibili in varie forme assai efficienti a 1D e 2D; non altrettanto vale per algoritmi IIR, specialmente a 2D, per i quali si indaga al fine di trovare soluzioni veloci e stabili. Una via di indagine per filtri FIR e IIR si basa sull'uso di coefficienti interi (potenze del 2), che semplificano notevolmente la complessità di filtraggio.

Pur essendo disponibili vari algoritmi per la riduzione o compressione dei dati, si indaga su algoritmi che, specialmente per le immagini, assicurino una maggiore riduzione della quantità dei dati (maggiori rapporti di compressione) con errori più piccoli. Una linea di ricerca riguarda la considerazione delle proprietà strutturali dei segnali e delle immagini, specialmente per applicazioni ove siano richieste tali proprietà e non il contenuto descrittivo completo (ad esempio, immagine del territorio, per la quale interessano le diverse configurazioni del suolo, quali diverse colture per terreno agricolo).

Gli algoritmi di riconoscimento di forme o configurazioni sono in fase di pieno sviluppo (fra l'altro anche per scopi di riduzione dei dati sopra accennati), utilizzando approcci statistici e strutturali (vedi cap. 10). Interessanti interazioni sono in atto con il settore dell'intelligenza artificiale (ad esempio per il riconoscimento del parlato e di oggetti in scene statiche o dinamiche).

Anche per necessità applicative, si vanno sviluppando sempre più algoritmi (come estensione di precedenti o nuove proposte) per l'elaborazione multidimensionale (M-D) a tre, quattro e più dimensioni (vedi capp. 1, 3, 5).

Per conseguire i risultati di efficienza, velocità e moderata complessità prima indicati, si tende a preferire algoritmi di tipo locale ad algoritmi globali, di tipo adattivo (alle variazioni temporali dei segnali o alle variazioni spaziali delle immagini) e non lineare o iterativo.

## 18.4 Sviluppi applicativi nei diversi settori

Il progresso della tecnologia e degli algoritmi di elaborazione numerica apre prospettive nuove nei diversi settori operativi. Spesso sono proprio questi settori, con le loro peculiari esigenze, che determinano la definizione e realizzazione di nuovi sistemi e algoritmi di elaborazione.

Come indicato nei capitoli 13-17, sono già molteplici le applicazioni nei settori delle comunicazioni e sistemi radar-sonar, della biomedicina, del telerilevamento, della robotica e perfino all'arte e dei beni culturali. Tali applicazioni si vanno estendendo, soprattutto per la riduzione dei costi delle tecniche numeriche, rispetto a quelle analogiche più classiche.

In particolare, per le comunicazioni si va sviluppando un sistema integrato per uso

anche domestico, nel quale un solo terminale numerico può ricevere la voce in forma numerica, il facsimile e la televisione. I sistemi di comunicazione usano sempre più elaboratori numerici e tecniche di elaborazione (in particolare nei centri di commutazione e collegamento con satelliti) ed emerge il nuovo settore, confluenza delle telecomunicazioni e dell'informatica, della telematica (vedi cap. 13).

Nelle applicazioni biomediche, oltre a sostituire gli analizzatori e apparati di misura analogici con analoghi numerici (analizzatori di spettro, filtri, correlatori numerici per segnali ECG, EEG) e convertire le immagini biomediche o bioimmagini in forma numerica (vedi cap. 14), si sviluppano nuovi sistemi di tomografia computerizzata per l'analisi accurata delle sezioni trasversali degli organi e dei tessuti (oltre che con raggi X, con microonde, ultrasuoni ecc.). Stanno acquistando importanza crescente gli apparati a risonanza magnetica nucleare (RMN), nei quali vengono usati opportuni campi magnetici al fine di estrarre informazioni significative sugli atomi del corpo umano. Si tende a elaborare anche immagini biomediche in movimento (ad esempio: cuore, polmoni), in modo da seguire i cicli vitali fondamentali nella loro reale evoluzione temporale e poter effettuare diagnosi più accurate nelle varie alterazioni patologiche.

Nel telerilevamento, anche per l'uso di nuove tecniche di misura e di sensori di tipo nuovo (come i radiometri a microonde, il radar e il lidar), si mettono a punto algoritmi di elaborazione in grado di integrare le diverse informazioni fornite dai sensori e di estrarre da queste i risultati utili ai vari fini pratici (mappe tematiche, classificazione dei terreni agricoli, risorse idriche), creando banche di dati territoriali facilmente gestibili.

Il settore della robotica inizia attualmente a utilizzare le tecniche numeriche di elaborazione dei segnali e delle immagini su vasta scala, al fine di sviluppare sistemi robotici dinamici e auto-regolantisi, in grado di intervenire con azioni meccaniche adeguate su oggetti diversi. In questo settore le conoscenze dell'intelligenza artificiale tendono ad essere sempre più impiegate per ottenere sistemi robotici più efficienti.

Altri settori, come le indagini sismiche, le ricerche petrolifere, l'astronomia, la microscopia elettronica, le ricerche spaziali con veicoli con o senza l'uomo a bordo, utilizzano già tecniche di elaborazione numerica per risolvere problemi di analisi, riconoscimento, inseguimento... Il peso di tali tecniche in questi settori è destinato sicuramente ad aumentare, per le varie considerazioni già riportate e, in sintesi, per motivi di efficienza e di costi.

Infine, come indicato nel capitolo 17, anche nel settore dell'arte, apparentemente così lontano dal mondo scientifico e tecnico, cominciano le applicazioni delle tecniche di elaborazione numerica per catalogare, analizzare, restaurare le opere d'arte: gli sviluppi sono promettenti e affascinanti, contribuendo peraltro a ricomporre l'unità delle attività umane.

## Riferimenti bibliografici

Brodersen R., *VLSI for Signal Processing*, Trends & Perspectives in Signal Processing, vol. 1, N. 1, 7-11 (1981).

Cappellini V., *L'elaborazione numerica delle immagini: problemi e tecniche*, Convegno "Elaborazione del Colore" (IBM, Roma 1981).

Chan C. F., *LSI Advances in Speech and Signal Processing*, Sessione E, IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing – ICASSP 81 (IEEE Press, Atlanta 1981).

DPS, *Image Processing Software* (Firenze 1984).

Sottini S., Russo V., Righini G. C., *Integrated Optical Devices for Signal Processing*, Proceedings of the International Conference on Digital Signal Processing, 333-40 (Tipografia Giuntina, Firenze 1981).

Telub P., *The GOP Image Processor*, Rapporto tecnico (Växjö 1981).

VDS, *VDS 7001 EIDOBRAIN – Architecture for Real Time Image Processing* (Firenze 1982).

# Indice analitico


Accumulatore, 184
Adattamento cromatico, 52
Albero:
  percorso o ramo dell', 170
  processo ad, 170
  struttura ad, 173
Alfabeto di un programma, 195
Algoritmi:
  approssimati, 105
  di calcolo veloce, 103
  di elaborazione esistenti, 330
  di trasformazione in forma veloce e compatta (FFT, FWT), 333
Algoritmi di elaborazione, caratteristiche degli:
  alta efficienza, 332
  elevata velocità, 318, 332
  minima complessità di uso, 332
*Aliasing*, 68, 76
Allineamento geografico, 306
Analisi:
  deterministica, 33
  spettrale generalizzata, 95
  statistica o aleatoria, 33, 41 sgg.
  termica, 295
  tridimensionali, 301
Apparato di controllo e di programmazione, 180
Apprendimento sequenziale, 172
*Array processor*, 331
Autocorrelazione, 38
  funzione di, 166
  uso della funzione di, 176
Autofunzioni, 102
Autovalori, 102

Banche di dati, 220
  artistici, 329
  territoriali, 334
Banda spettrale visibile, 47
Baricentro dell'oggetto, 318
Bersaglio, 221
BIBO, 91
*Binary unit*, 139
Bioimmagini, 289
  in movimento, 334
Bit, 70 sg.
*Buffer*, 144, 183
*Bus lines*, 186
Byte, 71

Calcolatori, uso di, 179
Campionamento spaziale, 66 sgg.
  adattivo, 71, 141, 143
  con estensione finita degli impulsi, 78
  funzione di, 66
  non uniforme, 71 sg.
  passo di, 82
  teorema del, 68
Canale di comunicazione, 218
Cannoni elettronici, 63
Caratteri, *vedi* Alfabeto
Caratteristiche o misure significative, *vedi Features*
CCD (*charge-coupled-devices*), 187
Centri di calcolo, 184
*Cepstrum*, 133
Chiasma, 49
Circuiti integrati digitali ad alta integrazione, 187
Classificatore(i), 170
  a minima distanza, 171
  di Bayes, 172
  lineari, 171
  perdita o diminuzione del, 172
Classificazione:
  dei tessuti, tecniche di, 296
  di oggetti, 110, 169
*Clustering*, 173
*Clutter*, 221
Codice(i):
  compatto, 139

di contorno, 175
di Freeman, 175
di Hamming, 218
univocamente decodificabile, 139
Codifica:
a lunghezza di parola variabile, 142, 149
a controllo d'errore, 218
binaria, 66, 69 sgg.
di canale, 140
Colore(i):
primari, 32, 50 e n.
secondari, 50
soggettivo, 52
Compressione dei dati (*data compression*), 138 sgg., 307
non reversibile o irreversibile, 141
Compressori di dati, scelta fra i vari, 151
*Computer art*, 323 sgg.
forme e figure casuali nella, 324
forme e figure predeterminate nella, 324
Comunicazioni, 214 sgg.
applicazione di metodi e tecniche di elaborazione numerica dei segnali e delle immagini nelle, 214 sgg.
Concatenazione nell'analisi di configurazioni, 173
Condensatori commutati, 331
Condizioni:
di non distorsione, 41
di stazionarietà, 43
Configurazioni di contorno, 155
Conoscenza statistica a priori, 162, 172
*Constrained-last-squares estimation*, 163
Contorno di decisione, 171
Contrasto, 58
sensibilità al, 51
Controllo:
di processi e di impianti, 217
interattivo nei sistemi robotici completamente automatici, 317
Conversione:
analogico-numerica (CAN), 66
delle immagini in forma numerica, 66 sgg.
numerico-analogica (CNA), 66
Convoluzione (o prodotto integrale), 37
discreta, 85
teorema della, 67
Correzioni, 306
COSDI (*compression with synchronization control and data interpolation*), 218
Covarianza, *vedi* Funzione
Crominanza, 63

Decisione sequenziale, 172
Decompressione o ricostruzione, operazione di, 141
Deconvoluzione, 45
Degradazione spaziale lineare, 76
Delta di Dirac, 38
Densità di probabilità:
a posteriori, 165
condizionale, 42
congiunta, 42
Densità spettrale di potenza, 43
Dischi ottici, 194
Dispersione del fascetto elettronico, 78
*Display*, 181
alfa-numerico, 181
Dispositivi:
ad accoppiamento di carica, *vedi* CCD
digitali, sviluppo della tecnologia dei, 330 sgg.
MSW (*magneto-static wave*), 331
ottici, 331
SAW (*surface acoustic wave*), 331
speciali, 187
VLSI, 186
Distanza:
fra *features* degli oggetti, 319
minima, criterio di, 321
Disturbi e rumore, 153, 155, 218
DPCM (*differential pulse code modulation*), *vedi* Modulazione differenziale

ECG (elettrocardiogramma), 289
analisi di, 299
Ecografia a ultrasuoni, 289
EEG (elettroencefalogramma), 289
analisi di, 299
Effetto:
di Mach, 52
zoom, 109
*Eigenvalues*, 165
Elaboratori:
ad array (*array processors*), 186
di immagini, 332
di segnali, 332
più o meno programmabili, 332
Elaborazione(i):
dell'immagine ecografica, 297
locali spaziali, 107 sgg.
multidimensionale (M-D), 333
Elaborazione numerica delle immagini:
cicli iterativi di, 332
confronto fra i vari sistemi di, 194
in hardware, 187
in tempo reale, 187
sistemi di, 179 sgg.
Energia elettromagnetica, 303
Equazione alle differenze finite, 144
Errore(i):
di picco $e_p$, 151
di ricostruzione, 75
quadratico medio (*mean-square-error*), 165
quadratico medio $e_m$ (*rms error*), 151
quadratico medio di ricostruzione (*restoration*), 162
in ricezione, probabilità di, 140
Errori nella rappresentazione:
dei dati di ingresso, 197
diagnostica sugli, 198

di conversione, 197
dovuti alla rappresentazione dei numeri (di troncamento o arrotondamento), 197
insiti nel metodo di calcolo, 197
Esposizione, 58
Estrazione:
dei contorni, 114, 320
di informazioni di interesse clinico, 297
e inseguimento degli oggetti in movimento, 320

Facsimile, 57, 61, 214
veloce, 220
Fase:
di acquisizione e d'inseguimento degli oggetti, 319
di apprendimento, 319
di riconoscimento dei singoli oggetti, 321
minima di un polinomio, 92
*Fast transform* (forma veloce), 105
Fattorizzare, 92, 131
*Features*, 169 sg.
*extractor*, 170
invarianti, 170
punto di uno spazio delle, a $N$ dimensioni $S_X$, 171
*space*, 170
vettore delle, *vedi* Vettore
Filtraggio numerico, 120 sgg., 218, 301, 307
adattato, tecniche di, 177
alla Kalman, 164 sgg.
del tipo di Wiener, 162 sg.
omomorfo, 163
passa basso o passa-banda, 148
uso del, 177
Filtro(i) numerico(i):
adattato, 221
con campionamento in frequenza, 125
con fase zero, 133
definiti con criteri di ottimizzazione, 126
bidimensionali, 130
di estrazione dal rumore, 46
di Kalman, 164
di pre-campionamento, 76
di ricostruzione o interpolazione, *vedi* Filtro spaziale 2D passa-basso
di ricostruzione omomorfo, 163 sg.
di Wiener, 162 sg.
2D FIR, 131
2D IIR, 131
2D inverso, 156
2D ruotati, 132
ellittici, 126
ideale, 128
nel primo quadrante, 133
nel secondo, terzo e quarto quadrante, 133
non ricorsivi o non ricorrenti, 121
parabolico, 157, 159
passa-basso circolarmente simmetrico, 128
ricorsivi o ricorrenti, 121
spaziale 2D passa-basso, 54, 72 sgg.
unidimensionali, 131
1D ricorrenti IIR, 126
Finestra 2D circolarmente simmetrica, 127
*First-order predictor*, 144
*Floppy-disk*, 180 sg.
Forma:
degli oggetti, 318
di Toeplitz, 163
integrata, 218
Fotopsine, 49
Fotorivelatore, 75
*Frame*, 217
Frazione di Weber, 51
Frequenza(e):
angolari o pulsazioni spaziali, 33
di taglio, 125
spaziale, 33n.
statistiche, 42n.
Funzione(i):
di autocorrelazione, uso della, *vedi* Autocorrelazione
di Bessel di prima e seconda specie, 158
di covarianza, 102, 166
di decisione *d*, 172
di distorsione, 140
di interpolazione, 80
di interpolazione bidimensionale, 74, 81
discriminante, 171
discriminante di tipo lineare, 171
di trasferimento, *vedi* Risposta in frequenza
di Walsh, 99 sg.
impulsiva campionata (*point-spread-function*), 164
probabilità, 33
Funzione(i) finestra, 121, 158
di Bessel, 123
di Blackman, 122
di Cappellini, 122 sgg., 128
di Dolph-Čebyšev, 122 sgg.
di Fejer, 122
di Hamming, 122
di Hanning, 122
di Kaiser, 122 sgg., 128
di Lanczos, 122 sgg., 128
di Papoulis, 122

Gamma ($\gamma$) della pellicola, *vedi* Pendenza gamma
*General operator processor*, 332
Gradiente:
di Sobel, 116
isotropico, 116
*smoothed*, 116
Grigio:
distribuzione dei livelli di, *vedi* Istogramma dei livelli di grigio
espansione della scala dei livelli di, 108
variazioni del, 161

*High density digital tape*, 331

Identificazione, sequenza di, 143
Immagine(i):
  a colori, 32
  angio-cerebrali, 291
  di fondo (*mask*), 295
  ecografiche da apparati a ultrasuoni, 296 sgg.
  fisse, 32, 214
  fotografiche, 290
  in bianco-nero, 215
  in movimento (tipo televisivo), 214 sgg.
  locali di tipo distribuito, 194
  numeriche, 70 sg.
  postume, 52
  radiografiche, 294 sg.
  scintigrafiche di medicina nucleare, 290 sgg.
  televisive a colori, 216
  termografiche, 295 sg.
  tomografiche, 299 sgg.
  variabili, 32
Immagine campionata, 66
Informazione(i):
  di sincronizzazione, *vedi* Sincronizzazione
  mutua, 140
  non ridondanti, 170
  strutturale, 170
Inibizione, 148
  laterale, 54
Insensibilità ai colori, 52
International Commission on Illumination, 50n.
Interpolatore di ordine zero, *vedi Zero-order interpolator*
Interpolazione, 142
  operazione di, 144
*Inter-frame*, 216
*Intra-frame*, 216
Invarianti inerziali, 322
Invarianza rotazionale, 321
Iso-contorni, 292
Istogramma dei livelli di grigio, 109 sgg., 142, 154
  analisi dell', 175
  variazioni o equalizzazione dell', 154

*Kernel*, 93

Lemma di Riemann-Lebesgue, 157
Lidar (radar ottico), 57, 64
  apparati, 221
Linee di scambio dei dati, *vedi Bus lines*
Linguaggio di descrizione della configurazione, 173
  grammatica del, 173
Livelli quantizzati, 70
Luminanza, 32, 63
Lunghezza media della codifica di sorgente, 139

Manoscritti antichi decifrati mediante tecniche di elaborazione numerica, 329
MAP (*maximum a posteriori probability*), *vedi* Stima
Mappe:
  astronomiche, 314
  di potenziali, 299
  di un territorio, 306
  integrate, 312
Maschera(e), 115
  gruppo o insieme di, 117
  sistema a, 63
*Mask*, *vedi* Immagine
*Maching*, 117
Matrice, 94
  di Hadamard, 97 sgg.
  di limitazione (*constraint matrix*), 163
  ortogonale, 94, 98
  trasposta della, 94
Media:
  spaziale, 42
  statistica o d'insieme, 43
  temporale o valore medio temporale, 42
Memoria(e):
  a sola lettura (*read only memory*, ROM), 185
  a sola lettura programmabili e cancellabili (*erasable programmable read only memory*, EPROM), 185
  esterne, 331
  o apparato di registrazione numerica, 180
  programmabili a sola lettura (*programmable read only memory*, PROM), 185
  proprietà di, 172
Metodi del tipo minimi quadrati vincolati, *vedi Constrained-last-squares estimation*
Metodi e tecniche di riconoscimento:
  confronto fra i vari, 177
  di tipo sintattico (o strutturale), 169 sg., 173 sgg.
  di tipo statistico (con prototipi), 169 sgg.
Microdensitometro, 78
Microistruzioni, 185
Microprogramma, 185
Microscopia elettronica, 334
MIMD (*multiple instruction - multiple data stream*), 332
*Minimum p-error technique*, 133
Misure integrate, 296
Modello(i):
  a tre ricevitori, 55
  della visione, 47 sgg.
  di contorni ideali, 118
  strutturali, 44 sgg.
Modulazione delta, 147
  adattiva in ampiezza, 147
  adattiva in durata (o asincrona), 147
  asincrona operazionale, 148
MTI (*moving target indicator*), 221

*Object modelling*, *vedi* Oggetti
Occhio, 47 sgg.
Oggetti:
  caratterizzazione degli (*object modelling*), 319
  forma degli, *vedi* Forma

individuazione di, 169
riconoscimento di, 169
Onde rettangolari, insieme di, 99
Opera(e) d'arte:
analisi delle, 325 sgg.
analisi e ricostruzione dei processi formativi delle, 327
banca di dati per le, 326
digitalizzazione delle, 326
e reperti archeologici, analisi, restauro e ricostruzione di, mediante tecniche di elaborazione numerica, 329
forme geometriche e moduli strutturali di composizione dell', estratti mediante calcolatore, 327
processo di deterioramento dell', valutato mediante digitalizzazioni e confronti, 326
ricostruzione di parti mancanti di, 328
ricostruzioni tridimensionali di quadri, 327
struttura geometrica, analitica dell', 327
Operatore(i), 38
del sistema, 180
e sistemi numerici bidimensionali, 83
Operazioni spaziali locali, 307
Ortonormalità, condizioni di, 94
Ospite (*host computer*), 186
Ottimizzazione:
di parametri, 133
tecniche di progetto di, 126

Parole:
di identificazione o sincronizzazione, 144
di simboli binari, 70
Partizioni, 173
Passo di campionamento, *vedi* Campionamento spaziale
*Pattern recognition*, *vedi* Riconoscimento
Pendenza gamma, 59
Percorso acromatico, 161
Perdita (o rischio):
condizionale, 172
media, 172
Permutazione circolare, 117
Peso o moltiplicatore, 115
*Pixel/pel*, 69
*Plotter*, *vedi* Registratore
Posta elettronica, 220
Precisione o risoluzione di rappresentazione dell'immagine in forma numerica, 71
Previsione, 141
adattiva lineare (ALP, *adaptive linear prediction*), 146
adattiva non lineare, 146
Probabilità:
di errore in ricezione, *vedi* Errore
di falso riconoscimento *vedi* Riconoscimento
Problema di decisione statistica, 172
Procedure:
di tipo non lineare, 118
gerarchiche, 332

Processo:
ad albero, *vedi* Albero
aleatorio o stocastico continuo, 42
ergodico, 43n.
gaussiano, 164
Prodotto integrale, *vedi* Convoluzione
Programma(i), 181
di calcolo, 198
di gestione e controllo, 198
di ingresso-uscita, 198
Programma(i) di elaborazione, 195 sgg.
Proprietà strutturali di segnali e immagini, 333

Quantizzazione dei campioni, 66, 69 sgg.
non uniforme, 71 sg.

Radar, 57, 64
a visione laterale, 64
ottico, *vedi* Lidar
sistemi, 221
Radiazione:
elettromagnetica e caratteristiche strutturali della superficie terrestre, interazione tra, 304
ultrasonica, 296
Radiografia, 289, 294 sg.
Radiometri/radiometria a microonde, 57, 64, 289, 295
Rapporto di compressione, 142
di bit, 143
di parole, 142
Rappresentazione:
con complemento a 1, 197
con complemento a 2, 197
con virgola mobile, 197
in grandezza e segno, 197
sintetica, 95
*Rate-distortion function*, 141
Registratore(i):
a carta, 82
su *plotter*, 82
grafico o *plotter*, 181
Registri:
a spostamento, 188
di istruzione, 184
Riconoscimento:
a prototipi, 169
di configurazioni (*pattern recognition*), 169 sgg., 308
di oggetti, *vedi* Oggetti
falso, probabilità di, 172
*vedi anche* Metodi e tecniche di riconoscimento
Ricostruzione (*restoration*), 163, 165
cieca (*blind*), 166
confronto fra le diverse tecniche di, 167
errore di, *vedi* Errore
Rilievo bidimensionale di potenziali (ECG, EEG), 289
Rischio condizionale e medio, *vedi* Perdita
Risorse terrestri, 303

Risposta(e):
frazionaria, 54
spettrali, 48
Risposta impulsiva, 40
discreta, 88
Risposta in frequenza (o funzione di trasferimento), 41, 87, 89
campioni della, 125, 130
inverso della, 156
Risultati parziali, 104
Rivelatori, 290
Robotica, 316 sgg., 334
Rodopsina, 49
Rotazione multidimensionale, 95
Rumore, 44
additivo, 44
bianco, 164
moltiplicativo, 44
*vedi anche* Disturbi e rumore

Scansione, 61
frequenza di, 62
processo di, 75
*vedi anche* Sincronismo scansione-trasmissione
Schermo, *vedi Display*
Scintigrafia nucleare, 289
Scomposizione, 95
descrizione della, 173
Sensori multispettrali, 57
a scansione, 61
Sequenza:
della riga nella matrice di Hadamard, 99
del primo quadrante, 91
del secondo, terzo e quarto quadrante, 91
di identificazione, *vedi* Identificazione
Serie di Fourier bidimensionale, 96
Sfuocamento (*blurring*), 158
Sincronismo scansione-trasmissione, 61
Sincronizzazione, informazione di, 218
*Single-letter fidelity criterion*, 141
Sistema(i):
a maschera, *vedi* Maschera
bidimensionale (2D), 38, 86 sgg.
del primo quadrante, 91
di comunicazione numerica via satellite, 218 sg.
MARISAT, MARECS, 218
non distorcenti, 41
non ricorsivi o non ricorrenti, 89
NTSC, 216
ottico sfuocato, 158
PAL, 216
radar, *vedi* Radar
ricorsivi o ricorrenti, 89
SECAM, 216
S-1 di elaborazione numerica delle immagini con microprocessore, 188 sg.
S-2 di elaborazione numerica delle immagini con minicalcolatore, 189 sgg.
S-3 di elaborazione numerica delle immagini con minicalcolatore e *array processor*, 191 sg.
S-4 di elaborazione numerica delle immagini IBM 7350, 192 sg.
tridimensionale (3D), 44
Sistema 2D lineare additivo, 39, 86
spazialmente invariante, 40, 87
Sistemi robotici:
completamente automatici, 316
con programma fisso, 316
con programma variabile, 316
velocità di elaborazione nei, 317
Soglia(e):
applicazione di una, 149
uso di, 175
Somiglianza o minima distanza, criteri di, 169, 173
Sorgente(i):
a memoria zero, 138
artificiali, 304
codifica di, 139
entropia della, 139
Sottoconfigurazioni, 170, 173
primitive, 173
Sottoprogrammi di base, 198
Spazio delle caratteristiche, *vedi Features*
*Special Report on Microprocessors/Microcomputers*, 186
Spettro:
bidimensionale generalizzato, 95
continuo di colori, 50
di $f(x, y)$, 34
Stabilità:
concetto di, 83
condizioni di, 83, 91
Stabilizzazione, procedure di, 92
Stereoscopia numerica, 308
Stima(e):
a massima verosimiglianza, 154
con massima probabilità a posteriori (*maximum a posteriori probability*, MAP), 165
del gradiente, 115
di Bayes, 165
Stringhe, 173
Struttura(e):
ad albero, *vedi* Albero
latenti di tipo archeologico estratte mediante tecniche di elaborazione numerica, 329

Tecniche:
con falso colore e pseudocolore, 160 sgg.
numeriche di ricostruzione, 300
Tecnologia MOS, 330
Telecomunicazioni, 220, 334
Telefotografia, 61
Telematica, 220, 334
Telemedicina, sistemi di, 220
Telemisura:
numerica, 218
sistemi di, 218 sgg.
Telerilevamento (*remote sensing*), 61, 303
applicato a idrologia e oceanografia, 311
applicato all'astronomia, 314

applicato a topografia e cartografia, 312
confronto e correlazione fra immagini di, 312 sgg.
elaborazione numerica dei dati, 306 sgg.
metodi passivi e metodi attivi di, 304 sgg.
nel settore agricoltura e foreste, 308 sgg.
Teletext, 220
Televisione, 62 sgg.
a colori, 63
Tempi discreti, 331
Teorema:
del campionamento *vedi* Campionamento
della convoluzione *vedi* Convoluzione
di Parseval, 37
Teoria:
dicromatica (di Hering), 50
quadricromatica, 50 sg.
tricromatica di Young-Helmholtz, 50, 55
Termografia, 289
nell'infrarosso (IR), 295
*Time-motion*, 296
Tolleranza di ampiezza fluttuante, 144
Tomografia computerizzata (TC) o tomografia assiale computerizzata (TAC), 289, 299 sgg.
*Tracking*, 318
Trasduttori elettrotermici o elettrochimici, 61
Trasduzione di informazione da ottica o elettromagnetica in elettrica, 179
Trasformata:
coseno, 97
di Haar, 100
di Hadamard, 97 sgg.
di Karhunen-Loeve, 102
*slant*, 101
SVD, 102
Trasformata di Fourier:
a *n* dimensioni (nD), 35
bidimensionale (2D), 33
2D discreta o numerica, 95 sgg.
veloce (FFT), 150, 301
uso della, 176
Trasformata di Walsh, 98 sg.
veloce (FWT), 150
Trasformata *z* bidimensionale, 83
proprietà della, 84 sgg.
Trasformazione(i), 93 sgg., 142
bilineare 2D, 132
di McClellan, 134
di variabili, 131
in frequenza, 126
numeriche 2D, 93 sgg.
punto-punto, 160
reversibile, 141
separabile, 94
unitaria, 94
uso di, 149
Trasformazioni geometriche, 308
uso di, e tecniche di confronto, 177
Trasportabilità, 198

Utente/utilizzatore dell'informazione di sorgente, 141

Valori medi, 112
Variazioni di scala, 307
Vettore(i), 94
di riferimento (prototipi), 171
$\bar{X}$ (delle *features* o delle caratteristiche), 170
Videotel, 220
Videotext, 220
Visione:
e percezione, 47 sgg.
fotopica, 48
monocromatica, modello per la, 52 sgg.
scotopica, 48

*Zero-order interpolator* (ZOI), 145
*Zero-order predictor* (ZOP), 144

I metodi e le tecniche di elaborazione di segnali convertiti in forma numerica si sono rapidamente estesi all'elaborazione delle immagini, aprendo prospettive nuove non solo nel campo della ricerca, ma anche in diversi settori applicativi. Questo sviluppo è dovuto a diversi motivi: definizione di algoritmi di elaborazione precisi e veloci; realizzazione di efficaci sistemi di conversione analogico-numerici e numerico-analogici; diffusione dei calcolatori standard, dei minicalcolatori e dei miniprocessori, e inoltre di elaboratori speciali con circuiti ad alta integrazione.

Il presente volume tratta l'elaborazione numerica delle immagini estendendosi dagli aspetti teorici di base agli esempi applicativi. Una parte introduttiva presenta le nozioni fondamentali riguardanti gli algoritmi e le tecniche per l'analisi e l'elaborazione numerica dei segnali e, con l'estensione da una a due dimensioni, delle immagini. Sono poi studiate le proprietà della visione e la caratterizzazione matematica delle immagini e dei sistemi numerici in cui queste possono essere convertite. Segue la descrizione degli operatori e degli algoritmi: filtri numerici, tecniche per la riduzione della ridondanza, per migliorare la qualità, per il riconoscimento di configurazioni. Infine, la terza parte presenta i sistemi e i programmi di elaborazione e poi una panoramica delle più importanti applicazioni: nelle comunicazioni e nei sistemi radar, nella telematica, in biomedicina, nel telerilevamento della superficie terrestre, nella robotica, nello studio di monumenti e opere d'arte.

74-9210-3

ISBN 88-339-5006-9